۴

مکان ریشه

اهداف فصل:

۱ـ آشنایی با ایده مکان ریشه.

۲ـ شرایط دامنه و زاویه: دو خاصیت اساسی مکان ریشه.

۳ـ ارایه قواعد ترسیم مکان ریشه برای رسم دقیق‌تر و سریعتر مکان ریشه.

۴ـ آشنایی با مسیرهای ریشه و رسم آن.

۴-۱ مقدمه

همانطور که در فصل سوم نشان داده شد، مشخصه اصلی رفتار حالت ـ گذرای یک سیستم حلقه ـ بسته به موقعیت قطبهای حلقه ـ بسته آن بستگی دارد. اگر سیستم یک بهره متغیر و قابل تنظیم داشته باشد، موقعیت قطبهای حلقه ـ بسته با تغییر و تنظیم این بهره، تغییر خواهد کرد. بنابراین، طراح سیستم کنترل باید از روند تغییرات قطبهای حلقه ـ بسته با تغییر بهره آن اطلاع داشته باشد. برای پیدا نمودن این روند و یا تعیین قطبهای حلقه ـ بسته می‌توان، معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته را حل کرد. لیکن حل معادلهٔ مشخصه برای سیستم‌های مرتبه سوم و بالاتر، مشکل و نیازمند بکارگیری نرم‌افزارهای مناسب است. علاوه‌برآن، با تغییر بهره باید تمامی محاسبات انجام شده را برای تعیین قطبهای حلقه ـ بسته دوباره انجام داد.

از نقطه نظر طراحی نیز ممکن است با تغییر بهره سیستم به مشخصه‌های مطلوب عملکرد رسید، در اینصورت طراحی تنها تغییر بهره به گونه‌ای است که محل قطبها در مکانهای مطلوب از قبل تعیین شده باشد. اگر با این تغییر بهره نتوانیم به مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم حلقه ـ بسته دست پیدا کنیم، باید از روشهای جبران سازی که در فصل ششم ارایه می‌شوند، استفاده کنیم.

یک روش بسیار ساده ترسیمی برای تعیین محل ریشه‌های معادلهٔ مشخصه به ازاء تغییرات بهره، توسط *و.ر.ا یوانز*[1] ارایه شده است. این روش که *مکان ریشه*[2] نامیده می‌شود، به طور وسیعی در مهندسی کنترل کاربرد پیدا کرده است. در این روش، مکان ریشه معادلهٔ مشخصه برای کلیه مقادیر یک پارامتر سیستم رسم می‌شوند. ریشه‌های متناظر با یک مقدار خاص از این پارامتر را می‌توان بر روی نمودار حاصله تعیین کرد، در عمل این پارامتر غالباً بهره حلقه ـ باز سیستم است، لیکن هر پارامتر دیگری از سیستم نیز می‌تواند باشد. به طور خلاصه می‌توان گفت که *مکان ریشه، نموداری از ریشه‌های معادلهٔ مشخصه یک سیستم حلقه ـ بسته به صورت تابعی از بهره سیستم حلقه ـ باز است.*

معادلهٔ مشخصه یک سیستم حلقه ـ بسته با عنصر غیر واحد $H(s)$ در مسیر فیدبک و تابع تبدیل حلقه ـ باز $G(s)$، معادله $1+G(s)H(s)=0$ است. ایده اصلی روش مکان ریشه آن

1- W. R. Evans

2- Root-Locus

است که مقادیری از s که ریشه معادلهٔ مشخصه می‌باشند، این معادله را برآورده می‌سازند. در واقع، قطبهای سیستم حلقه ـ بسته (مشخص کننده‌های پاسخ حالت ـ گذرا)، با صفرها و قطبهای $G(s)H(s)$ و بهره حلقه ـ باز ارتباط مستقیم دارند.

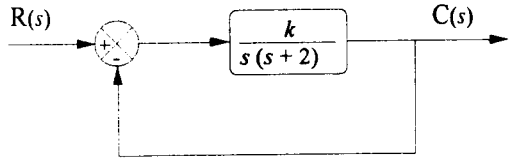
۴-۲ رسم ریشه‌های معادلهٔ مشخصه

برای درک بهتر روش مکان ریشه، سیستم کنترل حلقه ـ بسته نشان داده شده در شکل ۴-۱ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)} \qquad (۴-۲-۱)$$

$$=\frac{k}{s^2+2s+k}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

که در آن $\omega_n=\sqrt{k}$ و $\xi=1/\sqrt{k}$، k نیز بهرهٔ ثابت سیستم حلقه ـ باز است که از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند.



شکل ۴-۱ یک سیستم کنترل حلقه ـ بسته

ریشه‌های معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتند از

$$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k} \qquad (۴-۲-۲)$$

با بکارگیری معادله (۴-۲-۲) می‌توان ریشه‌های حلقه ـ بسته را به ازاء کلیه تغییرات پارامتر بهره k تعیین کرد. برای $k=0$ ریشه‌ها عبارتند از $s_1=0$ و $s_2=-2$ که همان قطبهای حلقه ـ باز سیستم هستند. برای $k=1$ ریشه‌های سیستم حلقه ـ بسته هر دو در ۱- خواهند بود. بنابراین برای $0<k<1$، ریشه‌ها حقیقی و بر روی محور حقیقی منفی به ترتیب بین ۲- و ۱- و ۰ تا ۱- قرار دارند. برای بهره‌های بزرگتر از ۱، $k>1$، ریشه‌ها مختلط هستند و عبارتند از

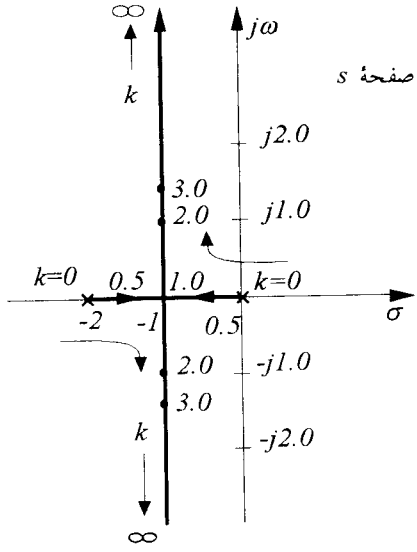
$$s_{1,2}=\sigma\pm j\omega_d=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-1\pm j\sqrt{k-1} \qquad (۴-۲-۳)$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ $s^2+2s+k=0$ برای مقادیر مختلفی از k بدست آورده شود، می‌توان آنها را برحسب k رسم نمود. جدول ۴-۱، ریشه‌های حلقه ـ بسته را برای مقادیر مختلفی از بهره حلقه ـ باز k نشان می‌دهد. در شکل ۴-۲ نیز این ریشه‌ها برحسب k رسم شده‌اند. با رسم یک منحنی بین نقاط تعیین شده، دو شاخه بدست می‌آید که تمامی ریشه‌های معادلهٔ مشخصه را به ازاء تغییرات k بین ۰ تا ∞ دربرمی‌گیرد. به این منحنیهای بدست آمده *نمودار مکان ریشهٔ معادلهٔ* (۴-۲-۱) می‌گویند. با بدست آوردن این نمودار می‌توان (در صورت امکان) ریشه‌های مطلوب معادلهٔ مشخصه را بر روی آن تعیین کرد و بهره‌ای که این ریشه‌ها را بدست می‌دهد محاسبه نمود. با تعیین ریشه‌های مطلوب، پاسخ حالت ـ گذرا را نیز می‌توان پیش‌بینی کرد. در این مثال ساده که ایدهٔ مکان ریشه را بخوبی نمایش می‌دهد، پیدا کردن و رسم ریشه‌های معادلهٔ مشخصه به ازاء تغییرات k بسادگی امکان‌پذیر است. توجه کنید که برای سیستم‌های مرتبه بالاتر تشکیل جدولی مانند ۴-۱ و نموداری مانند شکل ۴-۲، در عمل بسیار مشکل است. لذا در این فصل روشهای ترسیمی را ارایه خواهیم نمود که کار رسم نمودار مکان ریشه را بسیار ساده می‌کنند. از نرم‌افزارهای موجود کنترلی مانند Matlab و CC نیز می‌توان برای رسم دقیق این نمودارها کمک جست.

در این کتاب و در اکثر کاربردهای عملی، مقدار بهره k مثبت فرض شده است. البته k می‌تواند مقادیر منفی نیز اختیار کند که در آن صورت معادله (۴-۲-۲) تنها مقادیر حقیقی خواهد داشت. توجه کنید که با انتخاب هر k منفی، سیستم حلقه ـ بسته یک ریشه مثبت (ناپایدار) خواهد داشت.

k	s_1	s_2
۰	۰	-۲/۰
۰/۵	-۰/۲۹۳	-۱/۷۰۷
۰/۷۵	-۰/۵	-۱/۵
۱/۰	-۱/۰	-۱/۰
۲/۰	-۱/۰+j۱/۰	-۱/۰-j۱/۰
۳/۰	-۱/۰+j۱/۴۱۴	-۱/۰-j۱/۴۱۴
۵۰/۰	-۱/۰+j۷/۰	-۱/۰-j۷/۰

جدول ۴-۱ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه $s^2+2s+k=0$ برای مقادیر مختلف k



شکل ۴-۲ نمودار کلیه ریشه‌های معادلهٔ مشخصه $s^2+2s+k=0$ برای $0<k<\infty$، مقادیر k مشخص شده‌اند.

با بدست آوردن مکان ریشه، می‌توان تغییر در عملکرد سیستم را نسبت به تغییر در بهره k تعیین کرد. برای روشنتر کردن این مطلب به سیستم در نظر گرفته شده در شکل ۴-۱ توجه کنید. همانطور که از معادله (۴-۲-۳) مشخص است، تابع تبدیل حلقه ـ بسته سیستم برای $k>1$ عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k}{(s-\sigma-j\omega_d)(s-\sigma+j\omega_d)} \qquad (۴-۲-۴)$$

با توجه به تعاریف بخش ۳-۴، شکل ۴-۳ نسبت میرایی چند قطب را نشان می‌دهد. با تحلیل مکان ریشه می‌توان نتایج زیر را برای این سیستم به ازاء افزایش بهره آن استنتاج نمود:

۱. افزایش بهره موجب کاهش نسبت میرایی ξ و در نتیجه افزایش فرا جهش پاسخ است.
۲. افزایش بهره موجب افزایش فرکانس طبیعی میرا نشده w_n می‌شود.
۳. افزایش بهره موجب افزایش فرکانس طبیعی میرا شده w_d می‌شود.
۴. افزایش بهره تأثیری بر نرخ صفر شدن پاسخ (σ) نخواهد داشت. (توجه کنید که این مطلب برای سیستم‌های مرتبه بالاتر صادق نیست.)

۵. سیستم به ازاء کلیه مقادیر بهره از ۰ تا ∞ همواره پایدار است.

۴-۳ خواص اساسی مکان ریشه

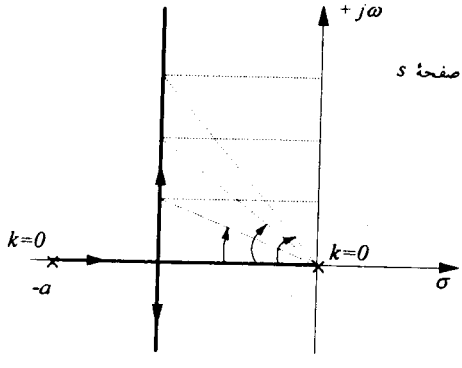
تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم با قطبهای $-p_1,\ldots,-p_n$ و صفرهای $-z_1,\ldots,-z_m$ عبارتست از

$$G(s)=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \qquad (۴-۳-۱)$$

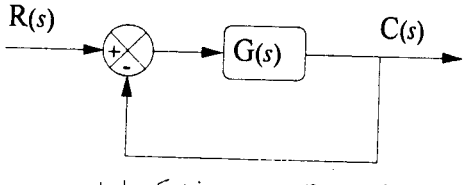
سیستم حلقه ـ بسته نشان داده شده در شکل ۴-۴ را در نظر بگیرید. بهره k قابل تنظیم است، قطبها و صفرهای سیستم حلقه ـ بسته به مقدار k و همچنین قطبها و صفرهای $G(s)$ در معادله (۴-۳-۱) بستگی دارد. تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{A(s)}{B(s)} \qquad (۴-۳-۲)$$

که در آن $A(s)$ و $B(s)$ به ترتیب چند جمله‌ای صفر و قطب سیستم حلقه ـ بسته هستند. این چند جمله‌ایها، صفرها و قطبهای سیستم را بدست می‌دهند. ریشه‌های چند جمله‌ای قطب،



شکل ۴-۳ مشخصه‌های یک سیستم کنترل مرتبه دوم از نمودار مکان ریشه.



شکل ۴-۴ سیستم فیدبک واحد

در معادله

$$B(s)=1+G(s)=0 \qquad (۴-۳-۳)$$

صدق می‌کنند و به ازاء مقادیر s که معادله (۴-۳-۳) را برآورده می‌سازند، داریم

$$G(s)=-1 \qquad (۴-۳-۴)$$

مقادیر s که معادله (۴-۳-۴) را برآورده می‌سازند، مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته هستند. توجه کنید که این معادله به ازاء تمام مقادیر بهره صادق است.

شرط دامنه: از معادله (۴-۳-۴) داریم

$$|G(s)|=1 \qquad (۴-۳-۵)$$

به معادله (۴-۳-۵)، شرط *دامنه*[1] گفته می‌شود. اگر تابع تبدیل $G(s)$ را به صورت زیر بنویسیم

$$G(s)=kG'(s) \qquad (۴-۳-۶)$$

که در آن تابع تبدیل $G'(s)$، بهره متغیر k را شامل نمی‌شود، آنگاه از معادله (۴-۳-۴) داریم

$$G'(s)=-\frac{1}{k} \qquad (۴-۳-۷)$$

و یا

$$|G'(s)|=\frac{1}{|k|} \qquad -\infty<k<\infty \qquad (۴-۳-۸)$$

معادله (۴-۳-۸) صورت دیگری از شرط دامنه است. هم‌چنین از معادله (۴-۳-۱)، شرط دامنه می‌دهد

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}|s+z_j|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}=\frac{1}{|k|} \qquad -\infty<k<\infty \qquad (۴-۳-۹)$$

شرط زاویه: با توجه به ماهیت مختلط $G(s)$، معادله (۴-۳-۴) برای $k\geq 0$ می‌دهد

$$\angle G(s)=\pm 180^\circ(2k+1) \qquad (۴-۳-۱۰)$$

که در آن $k=0,1,2,\ldots$ و برای $k<0$، داریم

$$\angle G(s)=\pm 360k \qquad (۴-۳-۱۱)$$

1- Magnitude condition

که در آن $k=0,1,2,...$. همچنین از معادله (۴-۳-۱)، داریم

$$\angle G(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j)$$

$$=\begin{cases}\pm(2k+1)\pi & k\geq 0\\ \pm 2k\pi & k<0\end{cases} \qquad (۱۲-۳-۴)$$

بنابراین برای هر نقطه‌ای در صفحه s که بر روی مکان ریشه یک سیستم قرار دارد، مجموع زوایا از صفرها به آن نقطه منهای مجموع زوایا از قطبها به آن نقطه، باید معادله (۴-۳-۱۲) را برآورده سازد که شرط *زاویه*[1] نامیده می‌شود.

در عمل شرایط بدست آمده در معادله‌های (۴-۳-۵) یا (۴-۳-۸) یا (۴-۳-۹)، (۴-۳-۱۰) و یا (۴-۳-۱۱) یا (۴-۳-۱۲)، هر کدام نقش خاصی را در ترسیم کامل مکان ریشه ایفاء می‌کنند. شرط زاویه را برای تعیین مکان ریشه در صفحه s بکار خواهیم بست. شرط دامنه را پس از رسم مکان ریشه، برای تعیین مقادیر بهره k، استفاده خواهیم نمود.

ترسیم مکان ریشه یک مسئله ترسیمی است که با بکارگیری قواعد ترسیم بدست آمده از شرایط زاویه، حل خواهد شد. اساس و شروع این ساختار ترسیمی نیز از قطبها و صفرهای حلقه ـ باز سیستم است که از معادله (۴-۳-۱) بدست آمده‌اند.

مثال ۴-۳-۱

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{k(s+5)}{s(s+1)(s+8)}$$

توجه کنید که تابع تبدیل داده شده ممکن است به صورت نوشته شده در معادله (۴-۳-۱) نباشد. در این حالت نخست باید آن را به صورت داده شده با معادله (۴-۳-۱) تبدیل کنیم. به عنوان مثال، ممکن است تابع تبدیل بالا به صورت زیر باشد

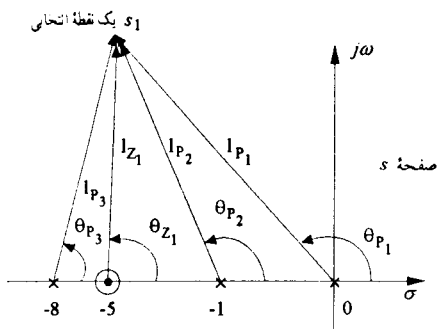
$$G(s)=\frac{k(1+0/2s)}{s(1+s)(1+0/125s)}$$

1- Angle condition

که باید آن را به صورت معادله (۴-۳-۱) تبدیل کرد. قطبها و صفرهای این تابع تبدیل به ترتیب با علامتهای × و ⊙ در شکل ۴-۵ در صفحه s نشان داده شده‌اند. اگر یک نقطه مانند s_1 را در صفحه s انتخاب کنیم، برای اینکه این نقطه بر روی مکان ریشه این سیستم قرار گیرد، باید در دو شرط زاویه و دامنه صدق کند. اگر همانطور که در شکل ۴-۵ نشان داده شده است، زوایای قطبها به نقطه انتخابی و صفرها به این نقطه را به ترتیب با θ_{p_i} و θ_{z_i} نشان دهیم (توجه کنید که براساس قرارداد، زوایا در جهت خلاف عقربه ساعت، مثبت در نظر گرفته می‌شوند) و فاصله این نقطه از قطبها و صفرها را به ترتیب با l_{p_i} و l_{z_i} نشان دهیم، از شرایط زاویه داریم

$$\theta_{z_1}-\theta_{p_1}-\theta_{p_2}-\theta_{p_3}=\begin{cases}\pm(1+2k)\pi & k\geq 0\\ \pm 2k\pi & k<0\end{cases}$$

که در آن $k=0,1,2,...$. این شرط باید توسط کلیه نقاط صفحه s که بر مکان ریشه قرار گرفته‌اند، برآورده گردد. با این شرط می‌توان این نقاط را تعیین کرد. هم‌چنین اگر نقطه‌ای این شرط را برآورده سازد، بر روی مکان ریشه قرار خواهد داشت و از شرط دامنه، می‌توان مقدار بهره k در آن نقطه را تعیین نمود. برای شرط دامنه داریم



شکل ۴-۵ تشکیلات قطب ـ صفر برای تابع تبدیل مثال ۴-۳-۱.

$$|k|=\frac{|s_1|\,|s_1+1|\,|s_1+8|}{|s_1+5|}=\frac{l_{p_1}l_{p_2}l_{p_3}}{l_{z_1}}$$

همانطور که از مثال ۴-۳-۱ مشاهده می‌شود، مراحل اصلی ترسیم کامل مکان ریشه عبارتند از:

۱. تعیین کلیه نقاطی در صفحه s که شرط زاویه را برآورده می‌سازند.

۲. تعیین مقادیر k در نقاط مختلف بر روی مکان ریشه با استفاده از شرط دامنه.

بدیهی است که روش سعی و خطا در تعیین نقاطی در صفحه s که شرط زاویه را برآورده می‌سازند، برای یک سیستم ساده‌کاری دشوار و برای سیستم‌های مرتبه بالاتر عملاً غیرممکن می‌شود. پیشنهاد دهنده روش مکان ریشه (ایوانز)، برای ترسیم مکان ریشه وسیله‌ای به نام *اسپایرول*[1] را طراحی کرده است که توسط آن جمع و تفریق کردن زوایای بردارها را تا حدی سریعتر انجام می‌داد. اگر چه این وسیله به ترسیم مکان ریشه سرعت بخشید، لیکن با وجود آن نیز ترسیم کامل مکان ریشه کاری وقت‌گیر و طولانی است. به این دلیل دسته‌ای از قواعد با استفاده از شرایط زاویه و دامنه ارایه گردیده‌اند که با بکارگیری آنها رسم مکان ریشه بسیار سر راست و ساده است. امروزه با بکارگیری کامپیوترهای دیجیتال و نوشتن نرم‌افزارهای مناسب براساس این قواعد، می‌توان با سرعت زیادی مکان ریشه سیستم‌های بسیار پیچیده را سریعاً بدست آورد و طراحیهای مختلفی را براساس روش مکان ریشه بسادگی انجام داد.

۴-۴ قواعد ترسیم مکان ریشه

در این بخش قواعدی را ارایه خواهیم کرد که با بکارگیری آنها می‌توان، مکان ریشه سیستم را به طور کامل ترسیم نمود. این قواعد براساس رابطه بین قطبها و صفرهای $G(s)$ و صفرهای معادلهٔ مشخصه (قطبهای سیستم حلقه ـ بسته) $1+G(s)$، بنا نهاده شده‌اند.

قاعده ۱: *تعداد شاخه‌های مکان ریشه*

یک شاخهٔ[2] مکان ریشه، مکان یک ریشه به ازاء تغییرات k بین $-\infty$ و ∞ است. درجهٔ معادلهٔ مشخصهٔ داده شده با معادله (۴-۳-۳) برابر n است و لذا n ریشه دارد. بنابراین تعداد شاخه‌های مکان ریشه یک سیستم برابر با درجه چند جمله‌ای مشخصهٔ آن (تعداد قطبهای حلقه ـ باز) سیستم است.

مثال ۴-۴-۱

تعداد شاخه‌های مکان ریشه معادلهٔ مشخصهٔ داده شده در زیر

$$s(s+1)(s+3)(s+4)+k(s+1)(s+3)=0$$

چهار است، زیرا معادله درجه چهارم است. معادله چهار ریشه دارد و لذا چهار شاخهٔ مکان ریشه وجود خواهد داشت.

1- Spirule

2- Branch

قاعده ۲: مکان ریشه بر روی محور حقیقی

به مکان قطبها و صفرها در شکل ۴-۶ توجه کنید. یک نقطه انتخابی مانند s_1 را بر روی محور حقیقی در نظر بگیرید. نکات زیر از شکل ۴-۶ بسادگی مشاهده می‌شوند:

(الف). جمع زوایای بدست آمده از قطبها و یا صفرهای مختلط برابر ۳۶۰° است. به عبارت دیگر

$$\theta_{p_5}+\theta_{p_4}=۳۶۰^\circ$$

و لذا قطبها و یا صفرهای مختلط $G(s)$ بر توزیع مکان ریشه بر روی محور حقیقی تأثیر نخواهند گذاشت.

(ب). تنها آن دسته از قطبها و یا صفرهای حقیقی $G(s)$ که در سمت راست s_1 قرار دارند، به مجموع زوایا سهمی خواهند افزود و در واقع سهم زاویه قطبها و یا صفرهای حقیقی که در سمت چپ s_1 قرار دارند، برابر صفر است. به عبارت دیگر

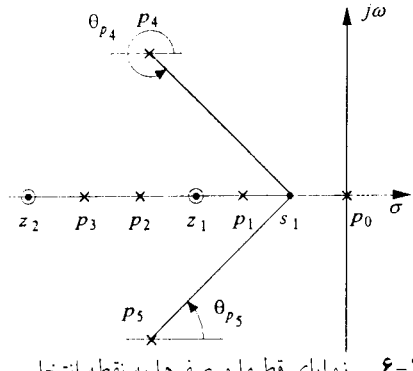
$$\theta_{p_1}=\theta_{z_1}=\theta_{p_2}=\theta_{p_3}=\theta_{z_2}=۰ \quad , \quad \theta_{p_0}=۱۸۰^\circ$$

و لذا با جایگزینی در معادله (۴-۳-۱۲) داریم

$$۱۸۰^\circ+۰+۳۶۰^\circ=۳\times ۱۸۰^\circ$$

که نشان می‌دهد s_1 بر روی مکان ریشه قرار دارد.

در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت که اگر تعداد قطبها و صفرهای حقیقی در سمت راست نقطه انتخابی فرد باشند، آن نقطه بر روی مکان ریشه قرار دارد و در غیراینصورت جزیی از



شکل ۴-۶ زوایای قطبها و صفرها به نقطه انتخابی s_1

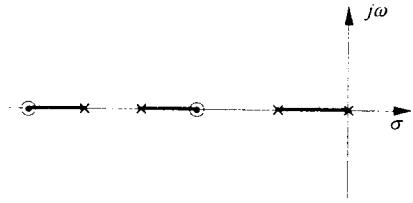
مکان ریشه نمی‌باشد. مکان ریشه برای قطبها و صفرهای شکل ۴-۶ بر روی محور حقیقی، در شکل ۴-۷ نشان داده شده است.

قاعده ۳: *نقاط شروع و پایانی مکان ریشه*

از معادله (۴-۳-۸) داریم

$$|G'(s)| = \frac{1}{|k|}$$

با به سمت صفر میل دادن بهره k، $|G'(s)|$ به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد و لذا s به سمت قطبهای $G'(s)$ یا $G(s)$ میل می‌کند. بنابراین $k=0$، یا شروع مکان ریشه، قطبهای $G(s)$ است. هم‌چنین با به سمت بی‌نهایت میل دادن بهره k، $|G'(s)|$ به سمت صفر میل خواهد کرد و لذا s به سمت صفرهای $G'(s)$ یا $G(s)$ میل می‌کند. بنابراین $k=\pm\infty$، یا نقاط پایانی مکان ریشه، صفرهای $G(s)$ است.



شکل ۴-۷ مکان ریشه بر روی محور حقیقی.

مثال ۴-۴-۲

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

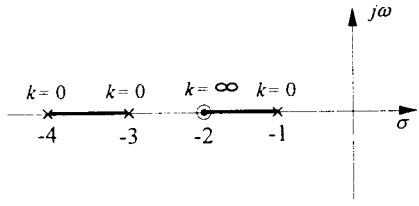
$$G(s)=\frac{k(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$(s+1)(s+3)(s+4)+k(s+2)=0$$

برای $k=0$، ریشه‌های معادله عبارتند از $s=-1$، $s=-3$ و $s=-4$. این سه ریشه، قطبهای سیستم حلقه ـ باز می‌باشند. هم‌چنین برای $k\to\infty$، معادلهٔ مشخصه حلقه ـ بسته را می‌توان با $k(s+2)=0$ تقریب زد. ریشه این معادله $s=-2$ است که صفر تابع تبدیل حلقه ـ باز است. باید توجه داشت که برای سیستمی با تابع تبدیل گویا، تعداد قطبها و صفرهای آن با در نظر گرفتن

قطبها و صفرها در بی‌نهایت برابر هستند. بنابراین مکان ریشهٔ این سیستم به ازاء $k=\infty$، به نقاط ۲-، ∞ و ∞ ختم خواهد شد. شکل ۴-۸ نقاط شروع و یکی از نقاط پایانی مکان ریشه این سیستم را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۸ نقاط متناظر با $k=0$ و $k=\infty$ مکان ریشه سیستم مثال ۴-۴-۲.

قاعده ۴: *مجانبهای مکان ریشه برای* $s\to\infty$

ترسیم مکان ریشه با مشخص نمودن رفتار مکان ریشه به ازاء $s\to\infty$ و یا به عبارت دیگر مشخص نمودن مجانبهایی[1] که توسط شاخه‌های مختلف برای $s\to\infty$ دنبال می‌شوند، بسیار ساده‌تر می‌شود. داریم

$$\lim_{s\to\infty} G(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{k(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

$$=\frac{k}{s^{n-m}}=-1 \qquad (۱-۴-۴)$$

از معادله (۴-۴-۱) در حد $s\to\infty$ بدست می‌آوریم

$$-k=s^{n-m} \qquad (۲-۴-۴)$$

از آنجاییکه شرایط زاویه و دامنه باید برای $s\to\infty$ نیز برآورده گردند. داریم

$$|k| = |s^{n-m}| \qquad (۳-۴-۴)$$

$$\angle -k=\angle s^{n-m}=(1+2k)180^\circ \qquad (۴-۴-۴)$$

از معادله (۴-۴-۴) داریم

$$(n-m)\angle s=(1+2k)180^\circ \qquad (۵-۴-۴)$$

1- Asymptotes

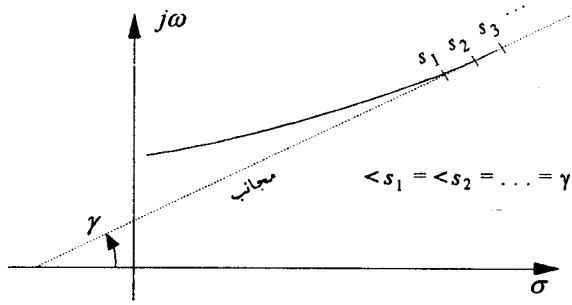
و لذا معادله (۴-۴-۵) می‌دهد که برای $s\to\infty$، زاویه شاخه عبارتست از

$$\angle s=\frac{(1+2k)\,180^\circ}{n-m} \qquad (۶-۴-۴)$$

بنابراین در حالت کلی تعداد n-m مجانب در مکان ریشه وجود دارد که زوایای آنها با محور حقیقی از معادله زیر بدست می‌آیند:

$$\gamma=\frac{(1+2k)\,180^\circ}{[\text{تعداد قطبهای محدود } G(s)]-[\text{تعداد صفرهای محدود } G(s)]} \qquad (k=0,1,2,\ldots) \qquad (۷-۴-۴)$$

با استفاده از معادله (۴-۴-۷)، همانطور که در شکل ۴-۹ مشاهده می‌شود، تمامی مقادیر s در حد $s\to\infty$ بر روی مکان ریشه زوایای یکسان خواهند داشت.



شکل ۴-۹ شرط مجانبی برای مقادیر بزرگ s

قاعده ۵: *نقطه تلاقی مجانبها با محور حقیقی*

محل تلاقی مجانبهای مکان ریشه، بر روی محور حقیقی قرار دارد و نقطه تلاقی آنها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_0=\frac{\sum[\text{قطبهای محدود } G(s)]-\sum[\text{صفرهای محدود } G(s)]}{n-m} \qquad (۸-۴-۴)$$

از آنجائیکه قطبها و صفرهای $G(s)$ حقیقی یا مختلط مزدوج هستند، قسمتهای موهومی در معادله (۴-۴-۸) همواره یکدیگرند را حذف خواهند کرد.لذا عبارات معادله (۴-۴-۸) را می‌توان با قسمتهای حقیقی قطبهای محدود $G(s)$ و قسمتهای حقیقی صفرهای محدود $G(s)$ جایگزین کرد.

مثال ۴-۴-۳

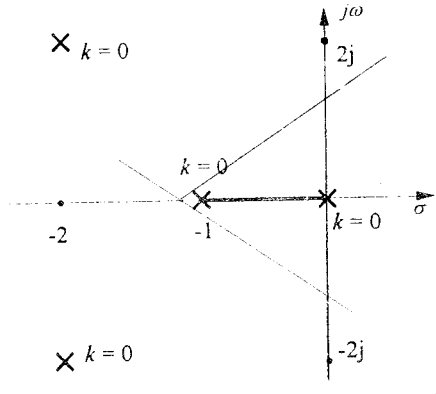
تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s^2+4s+8)} \qquad (k>0)$$

معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$s(s+1)(s^2+4s+8)+k=0$$

تشکیلات قطب ـ صفر $G(s)$ در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است. از پنج قاعده بالا می توان اطلاعات زیر را در رابطه با مکان ریشه سیستم بدست آورد:



شکل ۴-۱۰ اطلاعات مکان ریشه برای مثال ۴-۴-۳

۱. تعداد شاخه‌های مکان ریشه برابر با $n=4$ است.

۲. نقاط شروع مکان ریشه از قطبهای حلقه باز، متناظر با $k=0$ و نقاط پایانی متناظر با $k=\infty$ در چهار صفر در بی‌نهایت قرار دارند (این تابع تبدیل صفر محدود ندارد).

۳. تنها گستره بین ۰ و ۱- بر روی محور حقیقی جزء مکان ریشه است. توجه کنید که تعداد قطبها در سمت راست این گستره یک است.

۴. مکان ریشه چهار مجانب خواهد داشت. زوایای این مجانبها عبارتند از

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{4-0} \qquad k=0,1,2,3$$

و لذا

$$\gamma=45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ$$

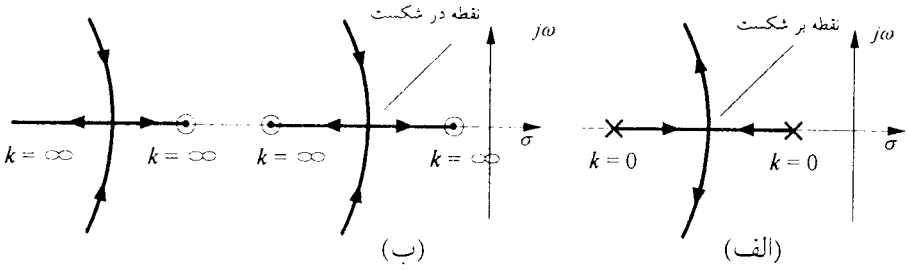
۵. نقطه تلاقی این مجانبها بر روی محور حقیقی به صورت زیر است

$$\sigma = \frac{-۵}{۴}$$

قاعده ۶: *نقاط شکستگی بر روی مکان ریشه*

شاخه‌های مکان ریشه از قطبهای حلقه ـ باز متناظر با $k=۰$ شروع می‌شوند و در صفرهای محدود یا نامحدود حلقه ـ باز متناظر با $k=\infty$ خاتمه می‌یابند. حالتی را در نظر بگیرید که مکان ریشه بین دو قطب حقیقی شاخه داشته باشد، همانطور که در شکل ۴-۱۱ (الف) نشان داده شده است. بدیهی است که باید نقطه‌ای بین دو قطب بر روی محور حقیقی وجود داشته باشد که شاخه‌ها از محور حقیقی جدا شده و به محدوده مختلط صفحه s وارد شوند و به سمت صفرهای سیستم حلقه ـ باز حرکت کنند. همچنین برای دو صفر محدود یا یک صفر محدود و یک صفر نامحدود، همانطور که در شکل ۴-۱۱ (ب) نشان داده شده است، شاخه‌ها از محدوده مختلط صفحه s باید بر نقطه‌ای بر روی محور حقیقی وارد شده و به سمت صفرها حرکت کنند. به این نقاط به ترتیب *نقاط در شکست*[1] و *نقاط برشکست*[2] گفته می‌شود.

در حالت کلی، مکان ریشه ممکن است بیش از یک نقطه برشکست یا درشکست داشته باشد. همچنین این نقاط لزوماً همواره بر روی محور حقیقی قرار ندارند و ممکن است که در ناحیه مختلط صفحه s نیز وجود داشته باشند. از آنجاییکه مکان ریشه، حالت متقارنی نسبت به محور حقیقی دارد (کلیه ریشه‌ها به صورت مختلط مزدوج رخ می‌دهند) این نقاط در محدوده مختلط صفحه s باید به صورت جفتهای مختلط مزدوج باشند.



شکل ۴-۱۱ نقاط خروج و ورود بر روی محور حقیقی

1- Break-away points

2- Break-in points

می‌توان نشان داد که نقاط برشکست یا درشکست بر روی مکان ریشه معادلهٔ مشخصهٔ $1+kG_1(s)=0$ ، باید معادلهٔ زیر را برآورده سازند

$$\frac{dG_1(s)}{ds}=0 \qquad (۹-۴-۴)$$

توجه کنید که معادلهٔ (۴-۴-۹) یک شرط لازم ولی غیر کافی را برای محاسبه نقاط برشکست یا درشکست بدست می‌دهد. به عبارت دیگر هر کدام از این نقاط باید معادلهٔ (۴-۴-۹) را برآورده سازند، لیکن کلیه نقاطی که معادلهٔ (۴-۴-۹) را برآورده می‌سازند، لزوماً نقاط برشکست یا درشکست نمی‌باشند. برای آنکه پاسخ معادلهٔ (۴-۴-۹) یک نقطه برشکست یا درشکست باشد، باید معادله $1+kG_1(s)=0$ را نیز برآورده سازد.

شرط شکستگی را به صورت معادل دیگری نیز می‌توان بیان نمود. داریم

$$k=-\frac{1}{G_1(s)} \qquad (۱۰-۴-۴)$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادلهٔ (۴-۴-۱۰) نسبت به s، بدست می‌آوریم

$$\frac{dk}{ds}=\frac{dG_1(s)/ds}{[G_1(s)]^2}$$

بنابراین شرط شکستگی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\frac{dk}{ds}=0 \qquad (۱۱-۴-۴)$$

مثال ۴-۴-۴

تابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

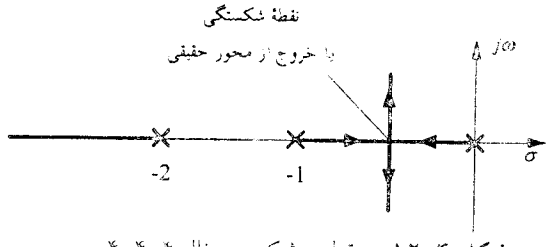
نقاط برشکست یا درشکست برای مکان ریشه را می‌توان با بکارگیری معادله (۴-۴-۹) بدین صورت بدست آورد

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]=-\frac{3s^2+6s+2}{s^2(s+1)^2(s+2)^2}=0$$

و لذا

$$3s^2+6s+2=0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از ۱/۶- و ۰/۴۲۲۶- ولی همانطور که از شکل ۴-۱۲ مشاهده می‌شود، تنها نقطه ۰/۴۲۲۶- بر روی مکان ریشه قرار دارد و لذا یک نقطه خروج از محور حقیقی است و بین دو قطب قرار گرفته است. نقطه ۱/۶- بر روی مکان ریشه قرار ندارد. (توجه کنید که اگر مکان ریشه را برای $k<0$ رسم کنیم، نقطه ۱/۶- بر روی آن قرار می‌گیرد و یک نقطه درشکست خواهد بود)



شکل ۴-۱۲ نقطه برشکست مثال ۴-۴-۴

قاعده ۷: *زاویه خروج از قطبهای مختلط و زاویه ورود به صفرهای مختلط*

برای رسم نسبتاً دقیق مکان ریشه، باید موقعیت مکان ریشه را در نزدیکی قطبها و صفرهای مختلط تعیین کنیم. یک نقطه آزمایشی را در محدوده‌ای بسیار کوچک حول قطب مختلط، همانطور که در شکل ۴-۱۳ (ب) نشان داده شده است، در نظر بگیرید (این محدوده به منظور نمایش زاویه خروج بسیار بزرگتر نشان داده شده است). تحت این شرایط بدیهی است که زوایای بدست آمده از سایر قطبها و صفرها بجز p_2 به این نقطه آزمایشی، هر کجای محدوده قرار گرفته شده باشد تقریباً ثابت است. از نظر سایر قطبها و صفرهای خارج از محدوده در نظر گرفته شده، سهم زاویه‌ای آنها به نقطه آزمایشی و قطب p_2 تقریباً یکسان است. با اعمال شرط زاویه به این محدوده کوچک داریم

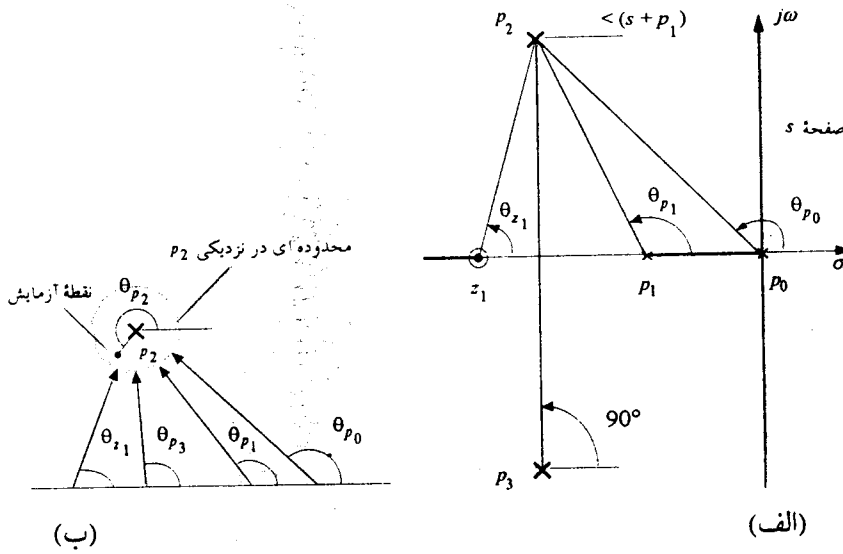
$$\theta_{p_0}+\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}-\theta_{z_1}=(1+2k)180^\circ$$

و لذا زاویه خروج عبارتست از

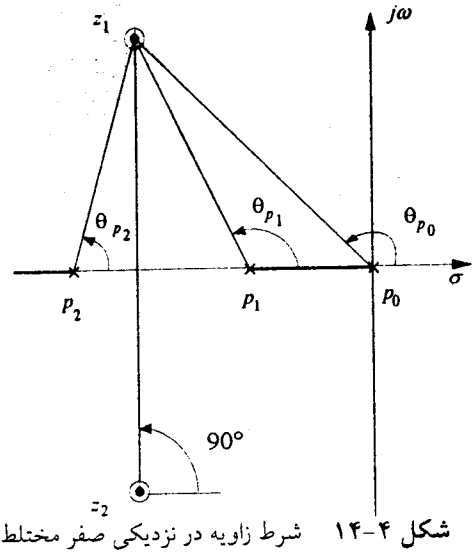
$$\angle(s+p_2)=\theta_{p_2}=(1+2k)180^\circ-(\theta_{p_0}+\theta_{p_1}+90^\circ-\theta_{z_1})$$

به طور مشابهی، می‌توان زاویه ورود به یک صفر مختلط را نیز تعیین نمود. برای تشکیلات قطب ـ صفر نشان داده شده در شکل ۴-۱۴، زاویه ورود به صفر z_1 عبارتست از

$$\angle(s+z_1)=\theta_{z_1}=(\theta_{p_0}+\theta_{p_1}+\theta_{p_2}-90^\circ)-(1+2k)180^\circ$$



شکل ۴-۱۳ جهت زاویه در نزدیکی قطب مختلط



شکل ۴-۱۴ شرط زاویه در نزدیکی صفر مختلط

به عبارت دیگر در حالت کلی، زوایای خروج و ورود به قطبها و صفرهای مختلط را می‌توان بدین صورت بدست آورد: زاویه خروج از قطب مختلط برابر است با

[(مجموع زوایای بردارها به قطب مختلط از صفرها)-(مجموع زوایای بردارها به قطب مختلط از سایر قطبها)] - ۱۸۰°

و هم‌چنین، زاویه ورود به صفر مختلط برابر است با:

۱۸۰° ـ [(مجموع زوایای بردارها به صفر مختلط از سایر صفرها) ـ (مجموع زوایای بردارها به صفر مختلط از قطبها)]

به طور مشابهی، می‌توان گفت که زاویه خروج از قطب مختلط s_1 عبارتست از

$$۱۸۰^\circ + arg\left(G(s)\right)\Big|_{s_1}$$

که در آن $arg\left(G(s)\right)\Big|_{s_1}$ زاویه فاز تابع تبدیل پس از حذف عبارت مربوط به قطب s_1 است. هم‌چنین، زاویه ورود به صفر مختلط s_1 عبارتست از $-arg\left(G(s)\right)\Big|_{s_1} - ۱۸۰^\circ$، که در آن $arg\left(G(s)\right)\Big|_{s_1}$ زاویه فاز تابع تبدیل پس از حذف عبارت مربوط به صفر s_1 است.

مثال ۴-۴-۵

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s^2+4s+5)}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

قطبها و صفرهای این سیستم به ترتیب عبارتند از ۱- ، j±۱- و j±۲-، محل این قطبها و صفرها در شکل ۴-۱۵ نشان داده شده است. با توجه به تقارن مکان حول محور حقیقی، در نظر گرفتن تنها یک قطب و صفر مختلط کفایت می‌کند.

با مراجعه به شکل ۴-۱۵، θ_{p_2} زاویه خروج مکان ریشه از قطب مختلط j+۱- است و لذا

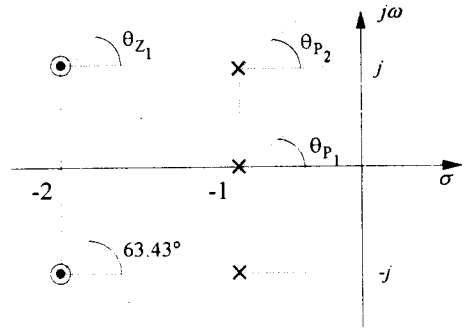
$$\theta_{p_2} = ۱۸۰^\circ - \left[(۹۰^\circ + ۹۰^\circ) - (۰^\circ + ۶۳/۴۳)\right] = ۶۳/۴۳^\circ$$

به طور مشابهی، θ_{z_1} زاویه ورود مکان ریشه به صفر مختلط j+۲- است، و لذا

$$\theta_{z_1} = \left[(۱۸۰^\circ + ۱۳۵^\circ + ۱۱۶/۵۷^\circ) - ۹۰^\circ\right] - ۱۸۰^\circ$$
$$= ۱۶۱/۵۷^\circ$$

زاویه خروج از قطب حقیقی ۱- نیز به صورت بالا بدست می‌آید. داریم

$$\theta_{p_1} = ۱۸۰^\circ - \left[(-۹۰^\circ + ۹۰^\circ) - (-۴۵^\circ + ۴۵^\circ)\right]$$
$$= ۱۸۰^\circ$$



شکل ۴-۱۵ محل قطب و صفر مثال ۴-۴-۵

یعنی همانطور که انتظار می‌رفت، مکان ریشه از قطب در ۱- شروع می‌شود و بر روی محور حقیقی منفی بحرکت درخواهد آمد.

قاعده ۸: *نقاط تلاقی مکان ریشه و محور موهومی*

نقاط تلاقی محور موهومی با مکان ریشه، نقطه ورود به محدوده ناپایداری را نشان می‌دهد و می‌توان آن را توسط روش روث و یا هر روش مشابه دیگر تعیین کرد.

مثال ۴-۴-۶

معادلهٔ مشخصه $s^3+6s^2+8s+k=0$ را در نظر بگیرید. آرایه روث برای این معادلهٔ مشخصه عبارتست از

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 6 & k \\ s^1 & \frac{48-k}{6} & \end{array}$$

برای $k=48$، ردیف مقابل s^1 صفر می‌شود و ریشه‌ها موهومی می‌باشند. از معادله کمکی $6s^2+48=0$، محل قطع محور موهومی توسط مکان ریشه را در $\pm\sqrt{8}j$ تعیین می‌کنیم.

قاعده ۹: *محاسبه k بر روی مکان ریشه*

پس از رسم کامل مکان ریشه، مقدار k در هر نقطه بر روی مکان را می‌توان از شرط دامنه تعیین کرد. در واقع مقدار k بر روی هر نقطه از مکان ریشه از رابطه زیر بدست می‌آید

$$|k| = \frac{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده از قطبهای } G_1(s) \text{ به نقطه مورد نظر}}{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده از صفرهای } G_1(s) \text{ به نقطه مورد نظر}} \qquad (۱۲-۴-۴)$$

این مقدار را می‌توان به طور ترسیمی یا تحلیلی محاسبه کرد.

مثال ۴-۴-۷

معادلهٔ مشخصه زیر را در نظر بگیرید

$$s^2+2s+2+k(s+2)=0$$

مکان ریشه این معادله در شکل ۴-۱۶ رسم شده است. مقدار بهره k در هر نقطه انتخابی s_1 بر روی مکان ریشه را می‌توان همانطور که در شکل ۴-۱۶ نشان داده شده است از رابطه زیر بدست آورد

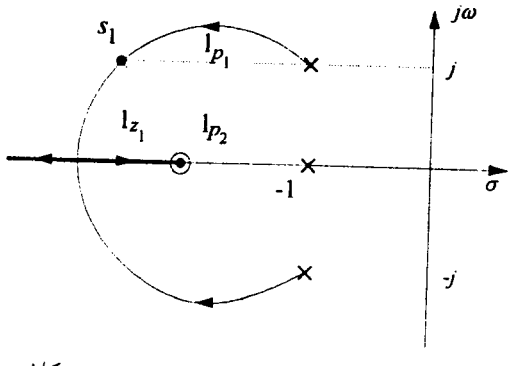
$$k=\frac{l_{p_1} l_{p_2}}{l_{z_1}}$$

که در آن l_{p_1} و l_{p_2} به ترتیب طول بردارهای رسم شده از قطبهای سیستم حلقه ـ باز در $\pm j1$ به نقطه s_1 می‌باشند و l_{z_1} نیز طول بردار رسم شده از صفر سیستم حلقه ـ باز در ۲- است.

قواعد بالا، رسم مکان ریشه را برای سیستم‌های مختلف امکان‌پذیر می‌سازد. در اینجا این قواعد را برای مرور سریع خواننده ارایه می‌کنیم:

۱. تعداد شاخه‌های مکان ریشه برابر با تعداد قطبهای تابع تبدیل حلقه ـ باز $G(s)$ است.

۲. برای $k>0$، نقاطی از محور حقیقی بر روی مکان ریشه قرار دارند که، در سمت راست



شکل ۴-۱۶ روش ترسیمی تعیین بهره بر روی مکان ریشه

آنها تعداد فردی از صفرها و قطبها قرار گرفته باشند.

۳. نقاط شروع مکان ریشه ($k=0$) قطبهای حلقه ـ باز و نقاط پایانی آن ($k=+\infty$) صفرهای حلقه ـ باز سیستم می‌باشند.

۴. برای $s\to\infty$ شاخه‌های مکان ریشه بطرف مجانبهای آن میل خواهند کرد. زوایای مجانبها برابرند با ($k>0$)

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{\text{تعداد قطبهای محدود } G(s) - \text{تعداد صفرهای محدود } G(s)} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

۵. نقطه قطع این مجانبها با محور حقیقی از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\sigma_0=\frac{(\text{مجموع قسمت حقیقی صفرها}) - (\text{مجموع قسمت حقیقی قطبها})}{(\text{تعداد قطبهای محدود } G(s)) - (\text{تعداد صفرهای محدود } G(s))}$$

۶. نقاط برشکست و درشکست مکان ریشه از

$$\frac{dk}{ds}=0$$

بدست می‌آیند.

۷. زاویه خروج از قطب مختلط برابر است با حاصل جمع زوایای کلیه صفرها منهای حاصل جمع زوایای کلیه قطبهای سیستم به قطب مورد نظر و جمع این حاصل جمع با $(1+2k)180^\circ$.

زاویه ورود به صفر مختلط برابر است با حاصل جمع زوایای کلیه قطبها منهای حاصل جمع زوایای کلیه صفرها و تفریق این حاصل جمع از $(1+2k)180^\circ$.

۸. نقاط تلاقی مکان ریشه با محور موهومی را می‌توان از روش روث بدست آورد. ابتدا با صفر قرار دادن ردیف مقابل s^1 مقدار بهره k را محاسبه کرده و سپس با استفاده از معادله کمکی (ردیف مقابل s^2) مقدار s را تعیین می‌کنیم.

۹. مقدار بهره k برای هر نقطه بر روی مکان ریشه را می‌توان از شرط دامنه بدست آورد:

$$|k|=\frac{\text{حاصلضرب فاصلهٔ نقطه انتخابی تا قطبهای } G(s)}{\text{حاصلضرب فاصلهٔ نقطه انتخابی تا صفرهای } G(s)}$$

مثال ۴-۴-۸

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{k(s+۳)}{s(s^{۲}+۳s+۴)} \qquad (k>۰)$$

مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته را به ازاء تغییرات k رسم کنید.

معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$s^{۳}+۳s^{۲}+۴s+k(s+۳)=۰$$

سیستم سه قطب دارد و لذا تعداد شاخه‌های مکان ریشه سه است. قطبهای سیستم حلقه ـ باز در ۰ ,۱/۵±j۱/۳- و صفر آن در ۳- قرار دارد. بنابراین نقاط شروع مکان ریشه در ۰ , ۱/۵±j۱/۳- و نقطه پایانی آن در ۳- و دو صفر در بینهایت قرار دارند. با توجه به وجود دو صفر در بی‌نهایت، دو شاخه از شاخه‌های مکان ریشه به سمت مجانب‌های خود میل خواهند کرد. زوایای مجانبها عبارتند از

$$\gamma=\frac{(۱+۲k)۱۸۰^{\circ}}{۳-۱}=(۱+۲k)۹۰^{\circ} \qquad k=۰,\pm ۱,\pm ۲,...$$

و لذا

$$\gamma=۹۰^{\circ},۲۷۰^{\circ}$$

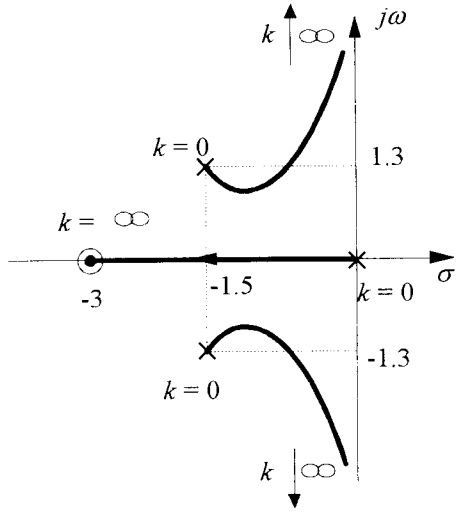
نقطه تلاقی مجانبها و محور حقیقی نیز از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\sigma_{۰}=\frac{-\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}+۳}{۳-۱}=۰$$

با توجه به تشکیلات قطب ـ صفرنشان داده شده در شکل ۴-۱۷ بدیهی است که مکان ریشه، نقطه برشکست و یا درشکستی نخواهد داشت و لذا اعمال قاعده ۶ ضروری به نظر نمی‌رسد. دو قطب مختلط در ۱/۵±j۱/۳- متناظر با $k=۰$، نقاط شروع دو شاخه مکان ریشه هستند که به سمت مجانبها در بی‌نهایت میل خواهند کرد. بنابراین برای رسم دقیقتر مکان ریشه، زاویه خروج از این دو قطب را بدست می‌آوریم. داریم

$$\text{زاویهٔ خروج از قطب مختلط } ۱/۵\pm ۱/۳j- = (۱+۲k)۱۸۰^{\circ}-(\theta_{p_۱}+۹۰^{\circ}-\theta_{z_۱})$$

با جایگزینی برای $\theta_{z_۱}=۴۱^{\circ}$ و $\theta_{p_۱}=۱۳۹^{\circ}$، داریم که زاویه خروج از قطب مختلط تقریباً ۸°- است. برای تعیین نقطه احتمالی تلاقی مکان ریشه با محور موهومی، آرایه روث را برای



شکل ۴-۱۷ مکان ریشه مثال ۴-۴-۸

معادلهٔ مشخصه حلقه ـ بسته تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{c|cc} s^{۳} & ۱ & ۴+k \\ s^{۲} & ۳ & ۳k \\ s^{۱} & ۴ & \end{array}$$

و لذا مکان ریشه هیچگاه محور موهومی را قطع نمی‌کند.

مثال ۴-۴-۹

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{s(s+۱)(s^{۲}+۴s+۸)} \qquad (k>۰)$$

مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته را به ازاء تغییرات k رسم کنید.

معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$s(s+۱)(s^{۲}+۴s+۸)+k=۰$$

از آنجاییکه سیستم چهار قطب دارد، لذا تعداد شاخه‌های مکان ریشه نیز ۴ است و از قطبهای

سیستم، همانطور که در شکل ۴-۱۸ نشان داده شده است، در ۰ ,۱- و ۲j±۲- شروع می‌شوند. با توجه به اینکه چهار صفر در بی‌نهایت داریم، هر چهار شاخه مکان ریشه به سمت چهار مجانب در بی‌نهایت میل خواهند کرد. توجه کنید که در گستره بین ۰ و ۱- بر روی محور حقیقی، یک قطب در سمت راست وجود دارد و لذا مکان ریشه بر روی محور حقیقی تنها در این گستره قرار گرفته است. زوایای مجانبها با محور حقیقی عبارتند از

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{4} \qquad k=0,1,2,3$$

و به عبارت دیگر

$$\gamma=\frac{180^\circ}{4},\frac{3\times 180^\circ}{4},\frac{5\times 180^\circ}{4},\frac{7\times 180^\circ}{4}$$

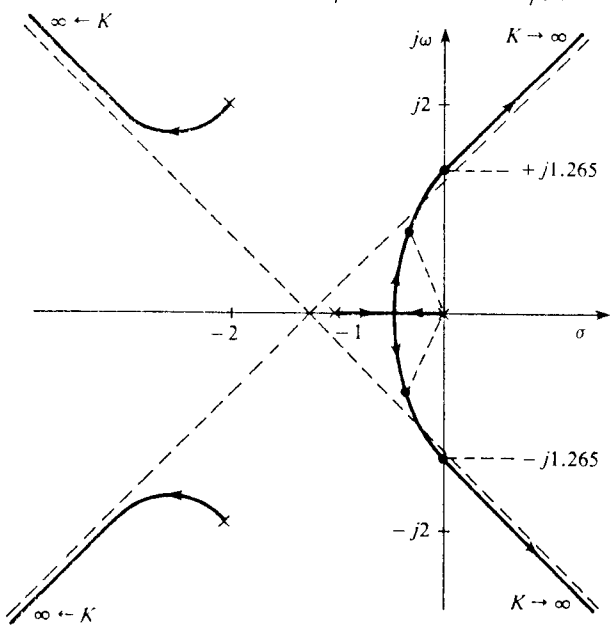
هم چنین نقطه تلاقی مجانبها با محور حقیقی عبارتست از

$$\sigma=\frac{0-5}{4}$$

زاویه خروج از قطبهای مختلط بدین صورت تعیین می‌گردند

زاویه خروج از قطب مختلط ۲j+۲-

$$=-\theta_{p_1}-\theta_{p_2}-\theta_{p_3}-(2k+1)180^\circ$$
$$=-135^\circ-116/57^\circ-90^\circ-(2k+1)180^\circ$$
$$=-341/57^\circ-180^\circ=-161/57^\circ$$



شکل ۴-۱۸ مکان ریشه مثال ۴-۴-۹

به طور مشابهی، زاویه خروج از قطب مختلط در ۲j-۲- بدست می‌آید. از تقارن مکان ریشه داریم که این زاویه ۱۶۱/۵۷° است. با توجه به تشکیلات قطب ـ صفر سیستم، یک نقطه برشکست بین دو قطب در ۰ و ۱- وجود خواهد داشت. این نقطه بر شکست را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\frac{dk}{ds}=-(۴s^{۳}+۱۵s^{۲}+۲۴s+۸)=۰$$

ریشه قابل قبول این معادله (ریشه‌ای که بر روی مکان ریشه قرار داشته باشد) عبارتست از $s=-۰/۴۴۰۲$. در اینجا با بکارگیری روش روث، نقطه تلاقی مکان ریشه با محور موهومی را تعیین می‌کنیم:

$s^{۴}$	۱	۱۲	k
$s^{۳}$	۵	۸	
$s^{۲}$	۱۰/۴	k	
$s^{۱}$	$۸-۵k/۱۰/۴$		
$s^{۰}$	k		

با صفر قرار دادن ردیف مقابل $s^{۱}$، بهره‌ای که در آن مکان ریشه، محور موهومی را قطع خواهد کرد بدست می‌آوریم. داریم $۸-۵k/۱۰/۴=۰$ و لذا در $k=۱۶/۶۴$ ریشه‌ها بر روی محور موهومی قرار خواهند گرفت. دقت کنید که در واقع شرایط پایداری این سیستم عبارتند از $k>۰$ و $۱۶/۶۴>k$. برای تعیین نقاط تلاقی از معادله کمکی استفاده می‌کنیم. داریم

$$۱۰/۴s^{۲}+۱۶/۶۴=۰$$

و لذا نقاط قطع در $\pm j۱/۲۶۵$ قرار دارند.

از قاعده نهم می‌توان بهره k را در هر نقطه بر روی مکان ریشه تعیین کرد. در واقع در این حالت داریم که برای هر نقطه انتخابی $s_{۱}$ مقدار بهره عبارتست از

$$k=|s_{۱}+۰|\ |s_{۱}+۱|\ |s_{۱}+۲-۲j|\ |s_{۱}+۲+۲j|$$

از شکل ۴-۱۸ مشاهده می‌شود که قطبهای غالب سیستم بر روی شاخه‌های مکان ریشه در سمت راست شکل ۴-۱۸ قرار دارند. دو قطب مختلط سمت را می‌توان به صورت $s^{۲}+۲\xi\omega_{n}s+\omega_{n}^{۲}$ نوشت. اگر بخواهیم که نسبت میرایی قطبها ۰/۵ و فرکانس طبیعی غیر میرای آنها نیز ۰/۶۹۵ باشد، ریشه‌های سیستم در $-۰/۳۴۷۵\pm j۰/۶۰۱۲$ قرار خواهند گرفت.

(توجه کنید که ریشه‌های با نسبت میرایی ۰/۵ بر روی خطهایی با زوایای $\pm 60^\circ$ (یعنی $\pm\cos^{-1} 0/5$) قرار دارند.) مقدار بهره k را در این دو قطب می‌توان از رابطه بالا بدست آورد، در واقع $k=4/114$ است.

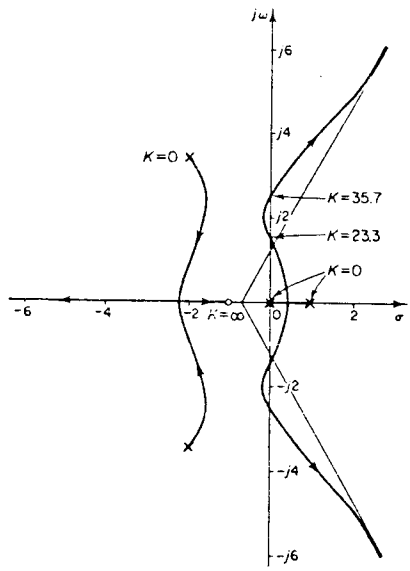
مثال ۴-۴-۱۰

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته را به ازاء تغییرات پارامتر k از صفر تا بی‌نهایت رسم کرده و محدوده k را برای پایداری تعیین نمائید.

قطبهای سیستم حلقه ـ باز عبارتند از ۰، ۱+ و $-2\pm j2\sqrt{3}$، هم چنین صفرهای سیستم حلقه ـ باز عبارتند از ۱- و سه صفر در بی‌نهایت. مکان ریشه بر روی محور حقیقی بین ۱ و ۰ و ۱- و ∞- خواهد بود. (به تعداد قطبها و صفرها در سمت راست این گستره‌ها همانطور که در شکل ۴-۱۹ نشان داده شده است، توجه کنید) از آنجاییکه سه صفر در بی‌نهایت داریم، لذا



شکل ۴-۱۹ مکان ریشه مثال ۴-۴-۱۰

مکان ریشه نیز سه مجانب خواهد داشت. زاویه این مجانبها عبارتند از:

$$\gamma=\frac{(۱+۲k)۱۸۰^\circ}{۴-۱} \qquad k=۰,۱,۲$$

$$=۶۰^\circ,۱۸۰^\circ,۳۰۰^\circ$$

نقطه تلاقی مجانبها و محور حقیقی نیز از رابطه زیر بدست خواهد آمد

$$\sigma=-\frac{(۰-۱+۲+j۲\sqrt{۳}+۲-j۲\sqrt{۳})-۱}{۴-۱}=-\frac{۲}{۳}$$

با توجه به تشکیلات صفر ـ قطب نشان داده شده در شکل ۴-۱۹، بدیهی است که دو نقطه شکست خواهیم داشت. بین دو قطب در ۱ و ۰ و هم‌چنین بین صفر در ۱- و صفر در بی‌نهایت به ترتیب نقاط برشکست و درشکست قرار گرفته‌اند. برای تعیین نقاط برشکست و درشکست نخست رابطه زیر را می‌نویسیم

$$k=-\frac{s(s-۱)(s^۲+۴s+۱۶)}{s+۱}$$

با مشتق‌گیری k نسبت به s بدست می‌آوریم

$$\frac{dk}{ds}=-\frac{۳s^۴+۱۰s^۳+۲۱s^۲+۲۴s-۱۶}{(s+۱)^۲}$$

$$=۰$$

و لذا نقاط برشکست و درشکست به ترتیب در $s=۰/۴۶$ و $s=-۲/۲۲$ قرار دارند.

از معیار روث برای تعیین مقادیر بهره k که به ازاء آنها شاخه‌های مکان ریشه محور موهومی را قطع می‌کنند، استفاده می‌کنیم. معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$s^۴+۳s^۳+۱۲s^۲+(k-۱۶)s+k=۰$$

آرایه روث را تشکیل می‌دهیم

$s^۴$	۱	۱۲	k
$s^۳$	۳	$k-۱۶$	
$s^۲$	$\frac{۵۲-k}{۳}$	k	
$s^۱$	$\frac{-k^۲+۵۹k-۸۳۲}{(۵۲-k)}$		
$s^۰$	k		

از صفر قرار دادن ردیف مقابل s^1 داریم

$$\frac{-k^2+59k-832}{(52-k)}=0$$

که برای $k=35/7$ و $k=23/3$ صفر است. معادله کمکی را برای تعیین مقادیر s بر روی محور موهومی در هنگام قطع شاخه‌ها، بکار می‌گیریم. ردیف مقابل s^2 می‌دهد

$$\frac{52-k}{3}s^2+k=0$$

و پاسخهای آن برای $k=35/7$ و $k=23/3$ به ترتیب عبارتند از

$$s_1=\pm j2/56$$

$$s_2=\pm j1/56$$

لذا مکان ریشه چهار بار محور موهومی را قطع می‌کند.

برای تعیین زاویه خروج از قطب مختلط در $-2+j2\sqrt{3}$ داریم

$$\text{زاویه خروج از } -2+j2\sqrt{3}=(2k+1)180^\circ+16^\circ-120^\circ-130/5^\circ-90^\circ$$
$$=-54/5^\circ$$

و زاویه خروج از قطب مختلط در $-2-j2\sqrt{3}$ برابر است با $54/5^\circ$.

با توجه به شکل مکان ریشه و یا با بکارگیری نتایج معیار روث، سیستم تنها برای $23/3<k<35/7$ پایدار است.

مثال ۴-۴-۱۱

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته را به ازاء تغییرات بهره k از ۰ تا بی‌نهایت رسم کنید.

معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

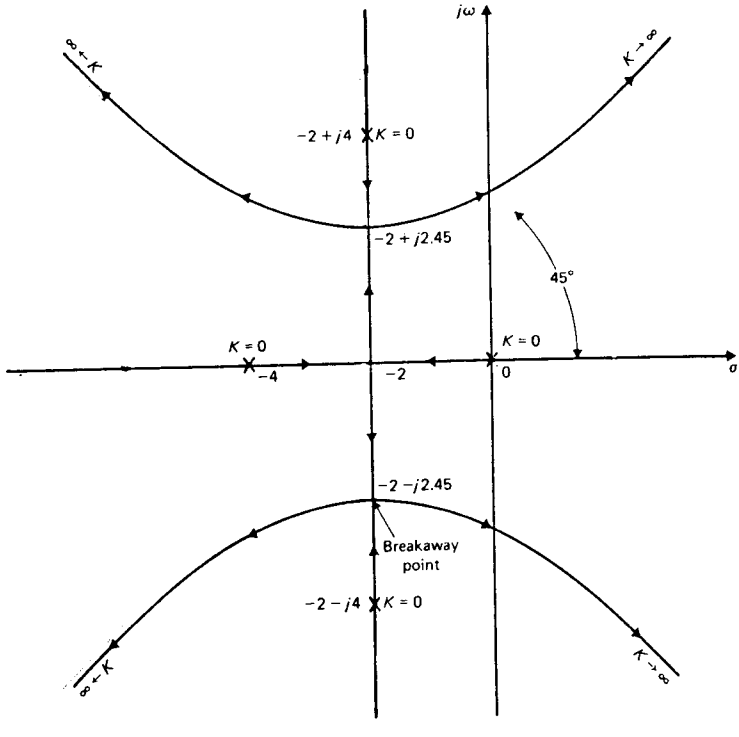
$$s(s+4)(s^2+4s+20)+k=0$$

قطبهای سیستم حقله ـ باز در ۰، ۴- و $-2\pm j4$ قرار دارند. هم‌چنین صفرهای حلقه ـ باز سیستم در بی‌نهایت قرار دارند. گستره بین قطبهای ۰ و ۴- بر روی محور حقیقی منفی جزء مکان

ریشه می‌باشد. اگر در این حالت بخواهیم نقطه برشکست بین دو قطب را تعیین کنیم، داریم

$$\frac{dk}{ds}=-(۴s^{۳}+۲۴s^{۲}+۷۲s+۸۰)/[s(s+۴)(s^{۲}+۴s+۲۰)]^{۲}$$
$$=۰$$

ریشه‌های معادله بالا در ۲- و ۲±j۲/۴۵- قرار دارند. بسادگی می‌توان نشان داد که در این حالت کلیه این ریشه‌ها بر روی مکان ریشه قرار دارند و لذا علاوه‌بر نقطه برشکست در ۲-که نقطه خروج از محور منفی حقیقی می‌باشد، دو نقطه برشکست مختلط نیز در ۲±j۲/۴۵- قرار دارد. همانند قبل می‌توان زاویه مجانبهای مکان ریشه را بدست آورد که °۴۵، °۱۳۵، °۲۲۵ و °۳۱۵ بوده و نقطه تلاقی آنها با محور حقیقی نیز در ۲- می‌باشد. نقاط تلاقی شاخه‌های مکان ریشه و محور موهومی از روش روث تعیین شده و این نقاط عبارتند از ±j۳/۱ . مکان ریشه این سیستم در شکل ۴-۲۰ نشان داده شده است.



شکل ۴-۲۰ مکان ریشه مثال ۴-۴-۱۱.

مثال ۴-۴-۱۲

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{k_1(1-s)}{s(1+s)(1+0/5s)(1+0/25s)}$$

مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته را به ازاء تغییرات بهره k_1 از ۰ تا بی‌نهایت رسم کنید. نخست تابع تبدیل را به صورت مناسب تبدیل می‌کنیم

$$G(s)=\frac{-8k_1(s-1)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

با جایگزینی $k=-8k_1$، داریم

$$G(s)=\frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

قطبهای سیستم حلقه باز در ۰ , ۱- , ۲- و ۴- قرار دارند. هم‌چنین سیستم یک صفر محدود ناپایدار در ۱ و سه صفر در بی‌نهایت دارد. توجه کنید که در این مسئله با دو بهره k و k_1 برخورد داریم که از نظر علامت عکس هم می‌باشند. در واقع برای $k>0$ و یا $k_1<0$، گستره‌های $(-\infty,-4]$، $[-2,-1]$ و $[0,1]$ بر روی مکان ریشه قرار دارند و برای $k<0$ و یا $k_1>0$ گستره‌های $[-4,-2]$، $[-1,0]$ و $(1,\infty)$ بر روی مکان ریشه قرار خواهند گرفت.

مکان ریشه چهار مجانب خواهد داشت. برای $k>0$ و یا $k_1<0$، زوایای این مجانبها از رابطه زیر تعیین می‌گردند

$$\gamma=\frac{(1+2k)180^\circ}{4-1}=60^\circ,180^\circ,300^\circ$$

هم‌چنین برای $k<0$ یا $k_1>0$، زوایای این مجانبها از رابطه زیر تعیین می‌گردند

$$\gamma=\frac{(2k)180^\circ}{4-1}=0,120^\circ,240^\circ$$

توجه کنید که این رابطه از معادله (۴-۴-۲) به ازاء k منفی بدست می‌آید، در این حالت معادله (۴-۴-۴) به صورت $\angle k=(2k)180^\circ$ تغییر پیدا خواهد کرد. نقطه تلاقی این مجانبها

با محور حقیقی نیز عبارتست از

$$\sigma_{\circ}=\frac{(\circ-۱-۲-۴)-(۱)}{۴-۱}$$
$$=-۸/۳$$

اکنون نقاط برشکست و درشکست مکان ریشه را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$k=\frac{s(s+۱)(s+۲)(s+۴)}{(s-۱)}$$

و لذا

$$\frac{dk}{ds}=\frac{(s+\circ/۳۲۲۵)(s+۱/۴۸۴)(s+۳/۲۴)(s-۱/۷۱۷)}{(s-۱)^{۲}}$$
$$=\circ$$

از اینرو ۰/۳۲۲۵-، ۱/۴۸۴-، ۳/۲۴- و ۱/۷۱۷ می‌توانند نقاط برشکست و درشکست مکان ریشه باشند. با توجه به مکان ریشه بر روی محور حقیقی، داریم که ۰/۳۲۲۵- و ۳/۲۴- نقاط برشکست و ۱/۷۱۷ یک نقطه در شکست برای مکان ریشه به ازاء $k<\circ$ یا $k_{۱}>\circ$ می‌باشند. هم‌چنین، ۱/۴۸۴- یک نقطه برشکست بر روی مکان ریشه به ازاء $k>\circ$ یا $k_{۱}<\circ$ است.

برای تعیین برخورد احتمالی مکان ریشه با محور موهومی از جدول روث استفاده می‌کنیم. معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$s^{۴}+۷s^{۳}+۱۴s^{۲}+(۸+k)-k=\circ$$

و لذا جدول روث عبارتست از

$s^{۴}$	۱	۱۴	$-k$
$s^{۳}$	۷	$k+۸$	
$s^{۲}$	$۹\circ-k$	$-۷k$	
$s^{۱}$	$-k^{۲}+۱۳۱k+۷۲\circ$		
s°	$-۷k$		

داریم

$$-k^{۲}+۱۳۱k+۷۲\circ=\circ$$

و لذا برای بهره‌های ۵/۲۸۳- و ۱۳۶/۲۸۳ نقاط قطع با محور موهومی را خواهیم داشت. نقاط تلاقی در این بهره‌ها $\pm j\circ/۶۲۳$ برای $k=-۵/۲۸۳$ و یا $k_{۱}=\circ/۶۶$ و $\pm j۴/۵۴$ برای $k=۱۳۶/۲۸۳$ و یا $k_{۱}=-۱۷/\circ۴$ می‌باشند.

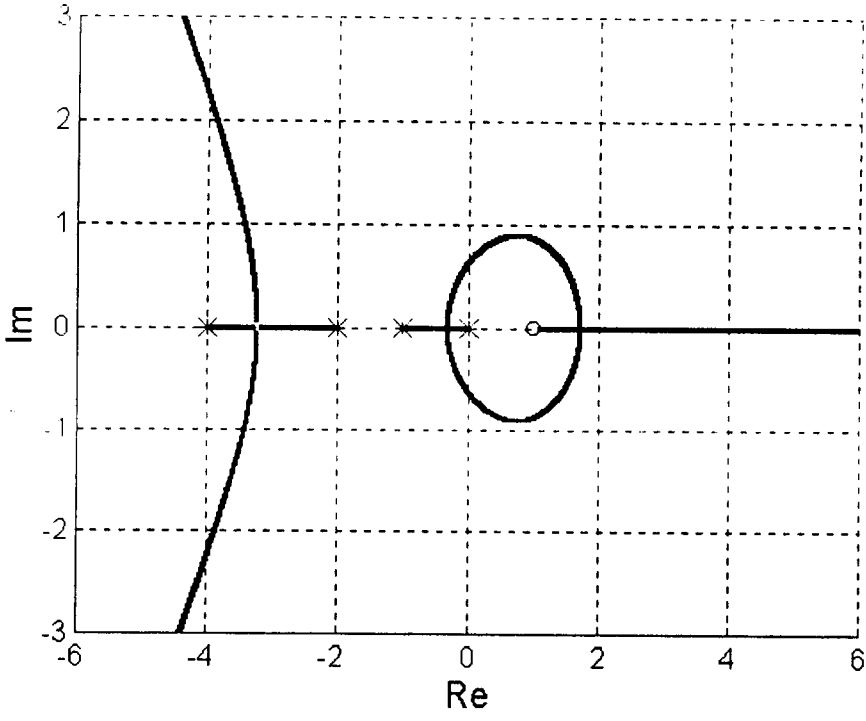
برای پایداری نیز از جدول روث داریم

$$۹۰-k>۰ \quad , \quad -k^{۲}+۱۳۱k+۷۲۰>۰ \quad , \quad -۷k>۰$$

و لذا برای یک سیستم پایدار باید داشته باشیم

$$۰<k_{۱}<۰/۶۶$$

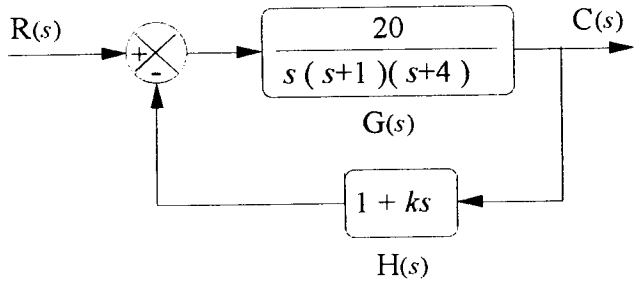
با توجه به نکات داده شده، مکان ریشه به صورت داده شده در شکل ۴-۲۱ می‌باشد.



شکل ۴-۲۱ مکان ریشه مثال ۴-۴-۱۲ برای $k<۰$ و $k_{۱}>۰$

قاعده ۱۰: *رسم مکان ریشه هنگامیکه پارامتر متغیر k به صورت یک بهره ضرب شونده در تابع تبدیل ظاهر نشده است.*

تذکر این نکته لازم است که سیستم‌هایی که تاکنون در نظر گرفته شده‌اند، سیستم‌های کنترلی با فیدبک واحد بوده‌اند. اگر سیستم کنترل همانطور که در شکل ۴-۲۲ نشان داده شده است، فیدبک غیر واحد $H(s)$ داشته باشد، آنگاه تمامی قواعد ذکر شده در این بخش را



شکل ۴-۲۲ سیستم کنترل مثال ۴-۴-۱۳

می‌توان بدون تغییر برای تابع تبدیل حلقه ـ باز $G(s)H(s)$ اعمال کرد. دقت کنید که تابع تبدیل حلقه ـ بسته سیستم عبارتست از

(۱۳-۴-۴)

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

و لذا از معادله (۴-۴-۱۳)، معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$1+G(s)H(s)=0 \qquad (۱۴-۴-۴)$$

بنابراین شرایط دامنه و زاویه و قواعد داده شده را می‌توان بدون تغییر همانند قبل برای $G(s)H(s)$ به جای $G(s)$ (بافیدبک واحد) بیان کرد.

در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $G(s)H(s)$ را نتوان به صورت معادله (۴-۳-۶) نوشت، به عبارت دیگر بهره متغیر k، به صورت یک عامل ضرب شونده در تابع تبدیل حلقه ـ باز $G(s)H(s)$ ظاهر نمی‌شود. راه حل کلی در این چنین مواردی نوشتن معادلهٔ مشخصه حلقه ـ بسته سیستم به صورتی است که k به صورت یک عامل ضرب کننده $G(s)H(s)$ ظاهر شود. برای نشان دادن این مطلب به مثال ۴-۴-۱۳ توجه کنید.

مثال ۴-۴-۱۳

سیستم حلقه ـ بسته نشان داده شده در شکل ۴-۲۲ را در نظر بگیرید. مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته را رسم کنید.

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم عبارتست از

$$G(s)H(s)=\frac{۲۰(۱+ks)}{s(s+۱)(s+۴)}$$

بدیهی است که پارامتر بهره k به صورت یک عامل ضرب شونده در تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم ظاهر نشده است. معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته به صورت زیر است

$$۱+\frac{۲۰(۱+ks)}{s(s+۱)(s+۴)}=۰$$

ویا

$$s^۳+۵s^۲+۴s+۲۰+۲۰ks=۰$$

نخست تعریف کنید

$$k_۱=۲۰k$$

سپس طرفین معادلهٔ مشخصه حلقه ـ بسته را بر حاصل جمع عباراتی که بهره متغیر k را در بر نمی‌گیرند، تقسیم کنید و بدین ترتیب بدست می‌آوریم

$$۱+\frac{k_۱s}{s^۳+۵s^۲+۴s+۲۰}=۰$$

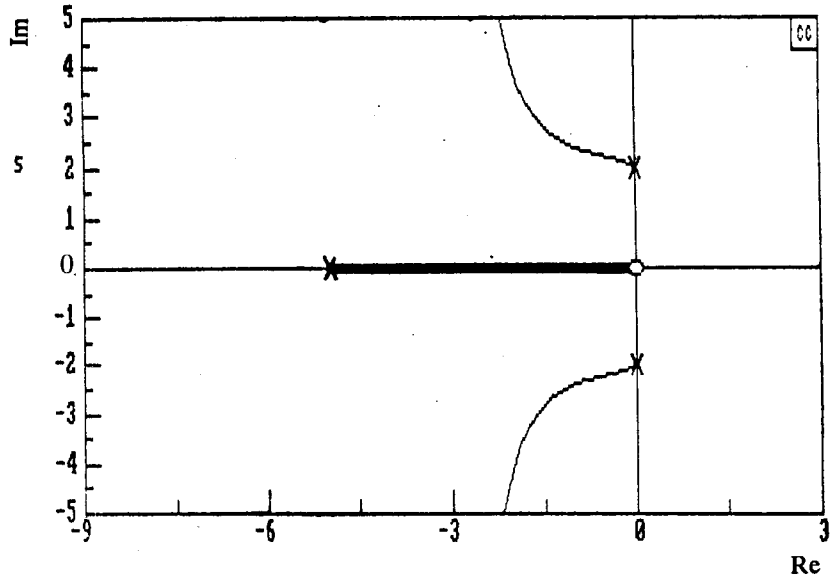
معادله بالا اکنون به صورت در نظر گرفته شده در قبل است، که در آن

$$G(s)H(s)=\frac{s}{s^۳+۵s^۲+۴s+۲۰}$$

قطبهای حلقه ـ باز عبارتند از ۵ ـ، ۲j± . هم‌چنین سیستم حلقه ـ باز یک صفر در ۰ و دو صفر در بی‌نهایت دارد. با اعمال قواعد داده شده داریم که محور حقیقی منفی ۰ و ۵- جزء مکان ریشه می‌باشد، زاویه مجانبهای مکان ریشه °۹۰± و نقطه قطع آنها با محور حقیقی در ۲/۵- می‌باشد. هم‌چنین زاویه خروج از قطب مختلف در j۲، برابر با °۱۵۸/۲ و در j۲- برابر با °۱۵۸/۲- است. شکل ۴-۲۳ مکان ریشه این سیستم را نشان می‌دهد.

۴-۵ نمودارهای مسیرهای ریشه

در رسم مکان ریشه، ارایه شده در بخشهای قبل، بهره قابل تغییر سیستم حلقه ـ باز k و یا یک بهره قابل تنظیم در یکی از بلوک‌های سیستم کنترل، تنها متغیر در معادلهٔ مشخصه سیستم



شکل ۴-۲۳ مکان ریشه مثال ۴-۴-۱۳

حلقه ـ بسته بود. بسیاری از سیستم‌های کنترل در عمل بیش از یک بهره قابل تغییر و قابل تنظیم دارند و لذا بررسی ریشه‌های سیستم حلقه ـ بسته برای تغییر همزمان این پارامترها از اهمیت خاصی برخوردار است. اگر در سیستمی دو پارامتر (یا بیشتر) تغییر کند، مکان ریشه متناظر را مسیرهای ریشه[1] می‌نامند.

معادله زیر را در نظر بگیرید

$$a(s)+k_1b_1(s)+k_2b_2(s)=0 \qquad (۱-۵-۴)$$

که در آن k_1 و k_2 پارامترهای متغیر و $a(s)$، $b_1(s)$ و $b_2(s)$ چند جمله‌ایهایی از s هستند.

اگر در معادله (۴-۵-۱)، k_2 را برابر صفر قرار دهیم داریم

$$a(s)+k_1b_1(s)=0 \qquad (۲-۵-۴)$$

و یا

$$1+k_1\frac{b_1(s)}{a(s)}=0 \qquad (۳-۵-۴)$$

1- Root contours

معادله (۴-۵-۳)، نشان دهنده معادلهٔ مشخصهٔ یک سیستم حلقه ـ بسته با تابع تبدیل حلقه ـ باز $b_1(s)/a(s)$ است، و رسم مکان ریشه آن با تغییر k_1 بسادگی همانند قبل امکان پذیر است (معادله (۴-۵-۳) را با معادله (۴-۴-۱۴) مقایسه کنید). اکنون مقدار پارامتر k_1 را ثابت فرض کرده و معادله (۴-۵-۱) را بر $a(s)+k_1b_1(s)$ تقسیم می‌کنیم. داریم

$$1+\frac{k_2b_2(s)}{a(s)+k_1b_1(s)}=0 \qquad (۴-۵-۴)$$

معادله (۴-۵-۴) به صورت معادلهٔ مشخصه یک سیستم حلقه ـ بسته $1+k_2G_2(s)H_2(s)=0$ است، که در آن

$$G_2(s)H_2(s)=\frac{b_2(s)}{a(s)+k_1b_1(s)} \qquad (۴-۵-۵)$$

تابع تبدیل حلقه ـ باز آن است. مسیرهای ریشه معادله (۴-۵-۱)، هنگامیکه k_2 تغییر کند ولی k_1 ثابت باشد، براساس تشکیلات قطب ـ صفر تابع تبدیل حلقه ـ باز داده شده با معادله (۴-۵-۵) ساخته می‌شود. توجه کنید که قطبهای $G_2(s)H_2(s)$، همان ریشه‌های معادله (۴-۵-۲) هستند.

بنابراین، مسیرهای ریشه معادله (۴-۵-۱)، هنگامیکه k_2 تغییر می‌کند باید همگی از نقاطی بر روی مکان ریشه معادله (۴-۵-۲) آغاز شوند. (نقاط شروع متناظر با $k_2=0$ هستند) با استفاده از مثال زیر، مفاهیم ارایه شده نشان داده می‌شوند.

مثال ۴-۵-۱

سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۴ را در نظر بگیرید. در این سیستم علاوه بر بهره k، پارامتر a نیز تغییر می‌کند. تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

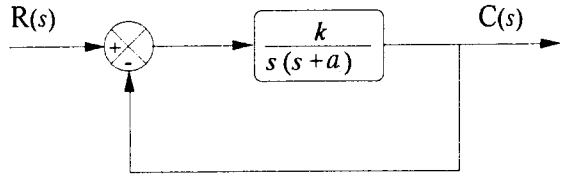
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{k}{s^2+as+k}$$

و معادلهٔ مشخصه آن عبارتست از

$$s^2+as+k=0$$

معادلهٔ مشخصه سیستم را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم

$$1+\frac{as}{s^2+k}=0$$



شکل ۴-۲۴ سیستم حلقه ـ بسته مثال ۴-۵-۱

و یا

$$\frac{as}{s^{۲}+k}=-۱$$

اگر بهره k را ثابت فرض کنیم، ریشه‌های حلقه ـ بسته را می‌توان بر حسب تغییرات a بدست آورد. مسیرهای ریشه سیستم را می‌توان با بکارگیری روش ارایه شده رسم مکان ریشه تعیین کرد.

مسیرهای ریشه به ازاء تغییرات پارامترهای a و k از ۰ تا ∞ بدست می‌آیند. این مسیرها از قطبهای $as/(s^{۲}+k)$ آغاز شده و به صفرهای آن ختم خواهند شد. برای $a=۰$، معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

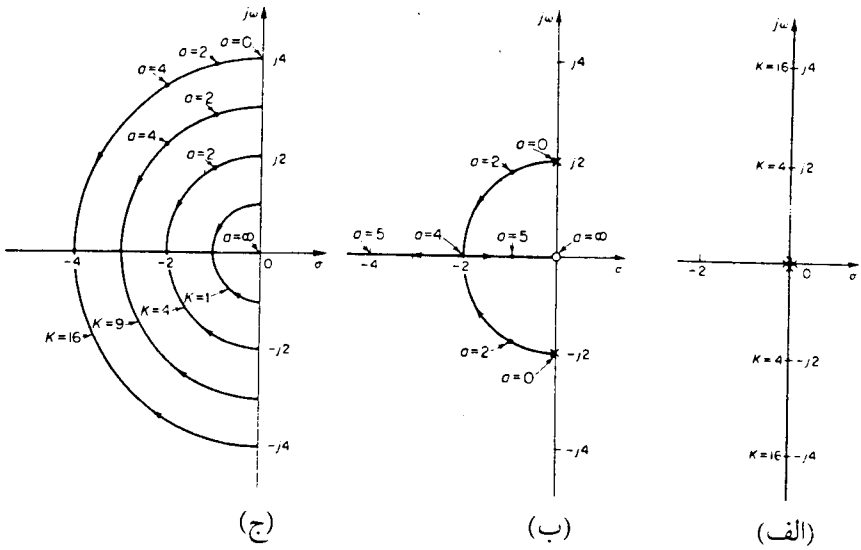
$$s^{۲}+k=۰$$

در این حالت دو قطب حلقه باز در مبداء وجود دارد و مکان ریشه معادله $k/s^{۲}=-۱$ در شکل ۴-۲۵ (الف) نشان داده شده است. برای رسم مسیرهای ریشه، فرض کنید که k در ۴ ثابت است. آنگاه داریم

$$\frac{as}{s^{۲}+۴}=-۱$$

در این حالت قطبهای حلقه ـ باز در $\pm ۲j$ قرار دارند و یک صفر محدود در مبداء وجود دارد. مکان ریشه این معادلهٔ مشخصه در شکل ۴-۲۵ (ب) نشان داده شده است. اگر k را تغییر دهیم، مکان ریشه مشابهی را می‌توان رسم نمود. مسیرهای ریشه این سیستم به ازاء تغییرات k و a از صفر تا بی‌نهایت در شکل ۴-۲۵ (ج) نشان داده شده‌اند. بدیهی است که مسیرهای ریشه از قطبها آغاز می‌شوند و در صفرهای تابع تبدیل $as/(s^{۲}+k)$ خاتمه می‌یابند.

همانطور که مشاهده شد، برای رسم مسیرهای ریشه یکی از پارامترهای متغیر را ثابت نگه می‌داریم و دومی را تغییر می‌دهیم، سپس دومین پارامتر متغیر را ثابت نگه می‌داریم و اولی



شکل ۴-۲۵ (الف) مکان ریشه برای سیستم مثال ۴-۵-۱ برای $a=0$ و $0 \leq k \leq \infty$، (ب) مکان ریشه برای $k=4$ و $0 \leq a \leq \infty$ (ج) نمودار مسیرهای ریشه

راتغییر می‌دهیم، با بدست آوردن دو مکان ریشه برای سیستم ، مسیرهای ریشه را بدست می‌آوریم.

مسایل

۴-۱- (الف) مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد که تابع تبدیل حلقه ـ باز آن در زیر داده شده است را رسم کنید.

$$G(s)=\frac{k(s+9)^2}{(s+1)^3}$$

(ب) اگر صفرهای حلقه ـ باز بجای ۹- در ۹/۱- قرار گیرند، تأثیر این تغییر مکان صفرهای حلقه ـ باز را بر مکان ریشه بررسی کنید.

(ج) اگر صفرهای حلقه باز بجای ۹- در ۸/۹- قرارگیرند، تأثیر این تغییر مکان صفرهای حلقه ـ باز را بر مکان ریشه بررسی کنید.

۴-۲- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{۲/۵k(s+۲)}{(s-۱)(s+۱)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) محدوده بهره k برای پایداری را پیدا کنید.

۴-۳- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{(۱+۰/۵s)(۱+۰/۲s)(۱+s)^{۳}}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۴- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{s(۲۰s^{۲}+۱۰s+۱)(s+۲)}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۵- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{k(s+۱)}{s^{۲}(s^{۲}+۱۰s+۲۹)}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۶- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{s(s^{۲}+۲s+۲)(s^{۲}+۶s+۱۰)}$$

مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

۴-۷- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{s(s+۱)(s+۲)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k که قطبهای مختلط حلقه ـ بسته با نسبت میرایی $\xi = ۰/۵$ را بدست می‌دهد، تعیین کنید.

۴-۸ـ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s^{۲} + ۸s + ۲۰)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k را به گونه‌ای تعیین کنید که قطبهای مختلط حلقه ـ بسته نسبت میرایی $\xi = ۰/۵۸$ داشته باشند.

۴-۹ـ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(۱ + ۰/۰۲s)(۱ + ۰/۰۱s)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k که سیستم را ناپایدار می‌کند، تعیین کنید.

(ج) از مکان ریشه، آن مقدار k که به ازاء آن قطبهای حلقه ـ بسته نسبت میرایی $\xi = ۰/۵$ داشته باشند را تعیین کنید.

(د) برای بهره بدست آمده از (ج) خطای سیستم به ورودی شیب را تعیین کنید.

۴-۱۰ـ مسئله ۴-۹ را برای تابع تبدیل حلقه ـ باز زیر تکرار کنید

$$G(s) = \frac{۱۰۰k}{s(s^{۲} + ۱۲s + ۲۵)}$$

۴-۱۱ـ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(s + ۱۰)}{s(s + ۱)(s + ۲)}$$

(الف) مکان ریشه سیستم را رسم کنید.

(ب) مقدار بهره k که سیستم را ناپایدار می‌کند، تعیین کنید.

(ج) تابع تبدیل حلقه ـ بسته سیستم را برای $\xi = ۰/۳$ بدست آورید.

۴-۱۲ـ مسئله ۴-۱۱ را برای تابع تبدیل حلقه ـ باز زیر تکرار کنید:

$$G(s)=\frac{k(۱+۰/۰۴s)}{s(۱+۰/۱s)(۱+۰/۱s+۰/۰۱۲۵s^{۲})}$$

۴-۱۳ـ (الف) مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته بافیدبک غیرواحد را رسم کنید، که در آن

$$G(s)=\frac{k(۱+s/۵)}{s^{۲}(۱+s/۱۲)}$$

تابع تبدیل حلقه ـ باز و

$$H(s)=۱+\frac{s}{۱۲}$$

تابع تبدیل عنصر فیدبک آن می‌باشد.

(ب) با فرض یک مقدار پایدار بهره k و ورودی پله واحد، مقدار پاسخ حالت ـ ماندگار سیستم را بدست آورید.

۴-۱۴- مسئله ۴-۱۳ را برای توابع تبدیل زیر تکرار کنید

$$G(s)=\frac{k}{s^{۲}+۲s+۲}$$

و

$$H(s)=\frac{۱}{s(s+۱)}$$

۴-۱۵ـ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

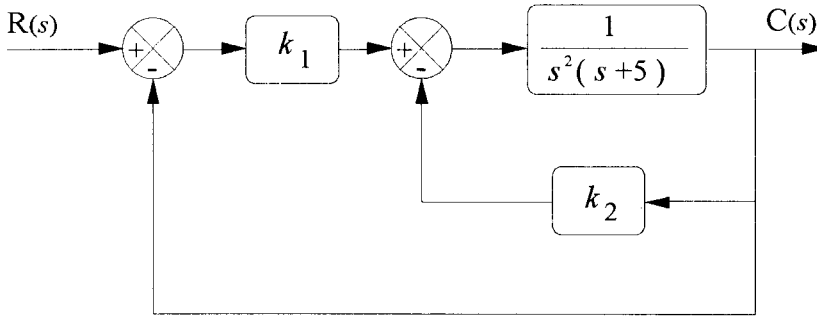
$$G(s)H(s)=\frac{k}{(s+۵)(۰/۴s+۱/۲)(۰/۵s^{۲}+۲s+۴)}$$

با رسم مکان ریشه، مقدار بهره k را چنان تعیین کنید تا سیستم حلقه ـ بسته یک نوسان کننده کامل[1] باشد.

1- Perfect oscillator

۴-۱۶- سیستم کنترل فیدبک نشان داده شده در شکل ۴-۲۶ را درنظر بگیرید. (الف) مکان ریشه سیستم حلقه ـ بسته را برای $k_2=0$ و $0 \le k_1 < \infty$ رسم کنید.

(ب) برای $k_1=10$ و $0<k_2<\infty$ مکان ریشه حلقه ـ بسته را رسم کنید.



شکل ۴-۲۶ سیستم کنترل مسئله ۴-۱۶

۴-۱۷- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{k(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}$$

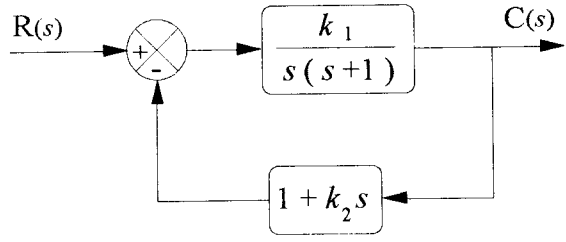
نمودار مسیرهای ریشه را برای تغییرات پارامترهای k و T از صفر تا بی‌نهایت رسم کنید.

۴-۱۸- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+a)}$$

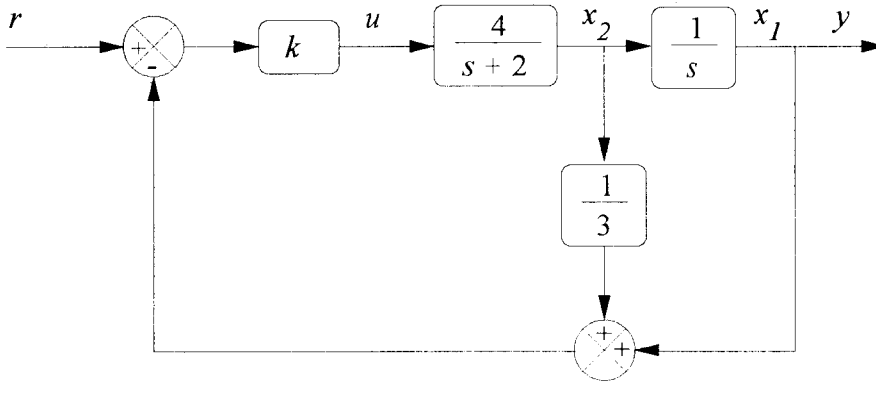
نمودار مسیرهای ریشه را برای تغییرات پارامترهای k و a از صفر تا بی‌نهایت رسم کنید.

۴-۱۹- سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۷ را در نظر بگیرید. (الف) برای $k_2=0/5$ و تغییرات k_1 از صفر تا بی‌نهایت مکان ریشه را رسم کنید. (ب) نمودار مسیرهای ریشه را برای تغییرات k_1 و k_2 از صفر تا بی‌نهاییت رسم کنید. (ج) قطبهای حلقه ـ بسته را بر روی مسیرهای ریشه برای $k_1=10$ و $k_2=0/5$ بدست آورید.



شکل ۴-۲۷ سیستم مسئله ۴-۱۹.

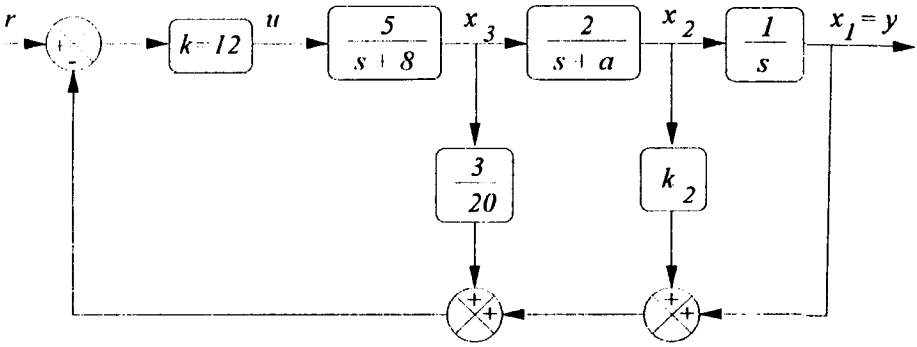
۴-۲۰- مکان ریشه سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۸ را رسم کنید.



شکل ۴-۲۸ سیستم مسئله ۴-۲۰.

۴-۲۱- سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۹ را در نظر بگیرید. (الف) مکان ریشه سیستم را برای $a=۲$ و $k_۲=\frac{۱۷}{۶۰}$ رسم کنید. (ب) تغییرات در مکان ریشه رابه ازاء تغییرات در a و $k_۲$ تعیین کنید.

۴-۲۲- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴-۳۰ را در نظر بگیرید. (الف) مکان ریشه را برای $G(s)=\frac{k}{s(s+۴)}$ و $D(s)=۱$ رسم کنید. (ب) مکان ریشه را برای $G(s)=\frac{k}{s(s+۴)}$ و $D(s)=\frac{s+۲}{s+۶}$ رسم کرده و تأثیر $G_c(s)$ را بر مکان ریشه سیستم بررسی کنید.



شکل ۴-۲۹ سیستم مسئله ۴-۲۱

۴-۲۳ - سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۳۰ را در نظر بگیرید. برای

$$D(s)=\frac{s+b}{s+۴} \quad , \quad G(s)=\frac{۱۰k}{s(s+۱)(s+۴)}$$

با بکارگیری مکان ریشه، مقادیر k و b که قطبهای غالب حلقه - بسته $-۱\pm\sqrt{۳}j$ را می‌دهند، تعیین کنید.

۴-۲۴ - سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۳۰ را در نظر بگیرید. برای

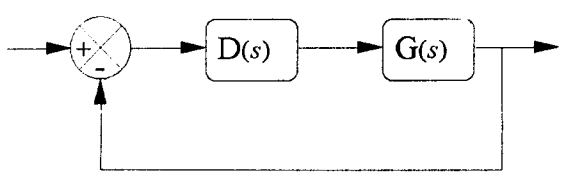
$$D(s)=\frac{s+b}{s+۴} \quad , \quad G(s)=\frac{۱}{s(s+۱)}$$

مکان ریشه سیستم را برای حالتهای زیر رسم کرده و ناپایداری سیستم حلقه - بسته را در هر حالت بررسی کنید:

حالت اول: $۱<a<b$ حالت دوم: $۱<b<a$

حالت سوم: $b<a<۱$ حالت چهارم: $a<b<۱$

حالت پنجم: $a<۱<b$ حالت ششم: $b<۱<a$



شکل ۴-۳۰ یک سیستم کنترل.

مراجع فصل چهارم

[4-1] Evans, W. R, *Graphical analysis of control systems,* Trans. AIEE, Vol. 67, pp 547-551, 1948.

[4-2] Evans, W. R, *Control systems synthesis by the root locus method,* Trans. AIEE, Vol. 69, pp 66, 1950.

[4-3] Evans W. R, ***Control systems dynamics,*** NewYork, McGraw-Hill, 1954.

[4-4] Chang C. S., *Analytical Method for obtaining the root-locus with positive and negative gain,* IEEE Trans. Autom. Control., Vol. AC-10, pp 92-44, 1965

[4-5] Yeh V. C. M, *The study of transients in linear feedack systems by conformal mapping and root-locus method,* Trans. ASME, Vol 76, pp 349-361, 1954.

[4-6] Lorens C. S. and Titsworth R.C., *Properties of root locus asymptotes,* IRE Trans. Automatic. Control, AC-5, pp 71-72, Jan 1960.

[4-7] Remec M. J., *Saddle-points of a complete root locus and an algorithm for their easy location in the complex frequency plane,* Proc. Natl. Electronic conf., Vol. 21, pp 605-608, 1965.

[4-8] Chen C. F., *A new rule for finding breaking points of root loci involving complex roots*, IEEE Trans. Automatic control, AC-10, pp 373-374, July 1965.

[4-9] Krishnan V., *Semi-analytic approach to root locus,* IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC-11, pp 102-108, Jan 1968.

[4-10] Doda D. J., *The digital computer makes root locus easy,* Control Eng., May 1958.

[4-11] Klagsbrunn Z. and Wallach Y., *On computer implementation of analytic root-locus plotting,* IEEE Trans. Automatic control, Vol AC-13, pp 744-745, Dec. 1968.

[4-12] Ash R. H. and Ash G. R., *Numerical computation of root loci using the Newton-Raphson technique,* IEEE Trans. Automatic control, Vol AC-13, pp 576-582, Oct. 1968.

[4-13] Haung R.Y., *The sensitivity of the poles of linear closed-loop systems,* Trans. AIEE Appl. Ind. Vol. 77, Part 2, pp 182-187, Sep. 1958.

[4-14] Ur H., *Root-locus properties and sensitivity relations in control systems,* IRE Trans. Automatic control, Vol AC-5, pp 57-65, Jan 1960.

[4-15] CHu Y., *Feedback control system with dead-time or distributed lag by root-locus method,* Trans. AIEE, Vol. 70, Part 2, PP 291, 1951.

[4-16] Yeung K. S., *A remark on the use of Reme's method for finding breakaway points,* IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC-26, pp 940-941, 1981.

کتاب شناسی

روش مکان ریشه برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل توسط ایوانز ارایه شده است. منابع اولیه در این زمینه، مراجع [4-1] ، [4-2] و [4-3] هستند. بکارگیری قواعد مرحله به مرحله برای ترسیم سریعتر و دقیقتر مکان ریشه، در مراجعی مانند [4-4] ، [4-6] ، [4-7] ، [4-8] و [4-9] پایه‌گذاری شده و امروزه در اکثر کتابهای درسی کنترل سیستم‌های خطی به طور مفصل و دقیق ارایه شده‌اند. هر کدام از مراجع پایان کتاب [1] تا [6] می‌توانند برای این منظور به کار گرفته شوند. در [3] رسم مکان ریشه برای بهره‌های منفی $k<0$ به طور مفصل، همزمان با رسم برای بهره‌های مثبت (که در این فصل مورد بررسی قرار گرفت)، ارایه شده است، هم‌چنین می‌توان به مرجع [4-4] نیز مراجعه کرد.

در [1] و [4-16] تعابیری برای توجیه نقاط برشکست و درشکست و وجود آنها در مکان ریشه برحسب بهره حلقه ـ باز سیستم k آمده است. در مرجع [1] ، علاوه‌بر قواعد ذکر شده در این فصل برای ترسیم مکان ریشه، قواعد تکمیلی برای تعیین تلاقی و یا عدم تلاقی مجانبهای مکان ریشه، بقاء مجموع ریشه‌های سیستم و تعیین ریشه‌ها بر روی مکان ریشه آمده است.

یکی از کاربردهای فرعی مکان ریشه، تعیین ریشه‌های یک چند جمله‌ای است. این کاربرد در مراجع [2] و [9] با ذکر مثالهایی آورده شده است. از کاربردهای دیگر مکان ریشه تحلیل حساسیت ریشه‌ها است. مراجع [4-13] و [4-14]، از اولین منابع در این زمینه می‌باشند. کتابهای [4] ، [9] و [3] با این مسئله به طور ساده و نسبتاً کاملی برخورد داشته‌اند.

اگر بنابه دلایلی در سیستم حلقه ـ بسته حذف صفر و قطبی رخ دهد، اثر این حذف و تحلیل آن توسط مکان ریشه در مراجع [2] و [8] آمده است.

با توجه به پیشرفت چشمگیر در زمینه طراحی سیستم‌های کنترل به کمک کامپیوتر، استفاده از نرم‌افزارهای مناسب برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مراجع [4-10] ، [4-11] و [4-12] را شاید بتوان از پیشگامان روشهای ترسیم مکان ریشه توسط کامپیوتر داشت. لیکن امروزه از نرم‌افزارهای Matlab، CC و یا ACSP همراه با کتاب [3] و بسیاری از نرم‌افزارهای دیگر می‌توان برای ترسیم کامپیوتری مکان ریشه سود جست.

بسیاری از سیستم‌های صنعتی دارای تأخیر زمانی[1] می‌باشند، برای قواعد ترسیم مکان ریشه برای سیستم‌های تأخیردار به مراجع [4-15] ، [1] ، [2] ، [3] ، [9] و یا [11] مراجعه شود. مرجع [11] عمیق‌تر از سایر مراجع به این موضوع پرداخته است.

برای ترسیم مکان ریشه سیستم‌های زمان ـ گسسته[2] در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل دیجیتال تقریباً (بجز محدوده پایداری) می‌توان قواعد ارایه شده در این بخش را به همین صورت بکار بست. ترسیم مکان هندسی ریشه‌های سیستم‌های زمان ـ گسسته در [۲۶] به تفصیل آورده شده است.

1- Time delay

2- Discrete-time