درس: اقتصاد مهندسی

مدرس: دکتر محسن کیا

بخش اول

مفاهیم اساسی اقتصاد مهندسی

فصل اول : مقدمه

فصل دوم : اصول پایه‌ای در اقتصاد مهندسی

فصل سوم : معرفی و کاربرد فاکتورها

فصل چهارم : حالتهای مخصوص فرآیند مالی

فصل پنجم : نرخهای اسمی و موثر

بخش اول

مفاهیم اساسی اقتصاد مهندسی

فصل پنجم

نرخهای اسمی و موثر

در فصلهای قبل نرخ بهره یا حداقل نرخ جذب کننده بصورت نرخ سالیانه معرفی شدند و یا به بیان دیگر دوره مرکب شدن بصورت سالیانه مورد بررسی قرار می‌گرفت.

مرکب کردن

- مرکب کردن: تقسیم طول کل دوره فعالیت اقتصادی مورد نظر به تعدادی دوره (تعداد دفعات پرداخت یا دریافت)
- در دوره مرکب شدن کمتر یا بیشتر از یکسال ⇦ نرخ بهره اسمی و نرخ بهره موثر

نرخ بهره اسمی سالیانه (r)

i: نرخ بهره در هر دوره مرکب کردن

t : تعداد دوره مرکب شدن

r: نرخ بهره اسمی

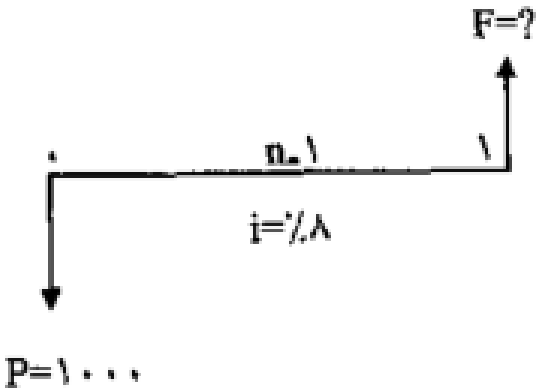
$$r = i * t$$

- مثال: اگر سال را به ۱۲ دوره (ماه) تقسیم کنیم و نرخ بهره در ماه ۴٪ باشد نرخ بهره اسمی سالانه برابر با ۱۲*٪۴=٪۴۸

وقتی دورهٔ مرکب شدن کمتر و یا بیشتر از یکسال باشد، بحث نرخهای اسمی و موثر پیش می‌آید. مثلاً اگرنرخ‌بهره ۱٪ در ماه باشد تفاوت نرخهای اسمی و موثر را بهتر می‌توان تشخیص داد. اگر ۱٪ در ماه را در تعداد ماه در سال یعنی ۱۲ ضرب کنیم، نرخ اسمی سالیانه ۱۲٪ بدست خواهد آمد. همانطور که ملاحظه می‌شود مسئله ارزش زمانی پول در حاصلضرب ۱۲٪ = ۱۲ × ۱٪ در نظر گرفته نشده است.

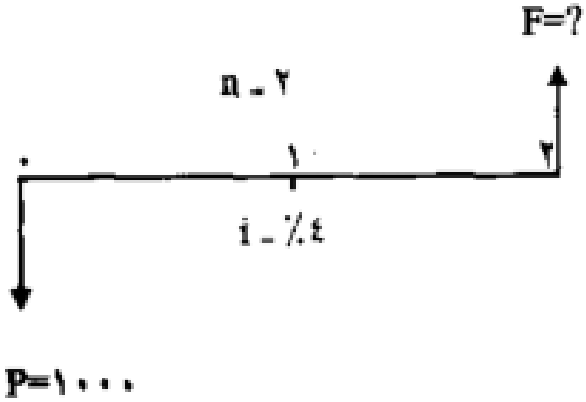
چنانچه ارزش زمانی پول را با توجه به دورهٔ مرکب شدن در نظر بگیریم، نرخی حاصل خواهد شد که مسلماً بیش از ۱۲٪ خواهد بود. این نرخ «نرخ موثر سالیانه» نامیده می‌شود و بستگی به نوع مرکب شدن در طول سال دارد.

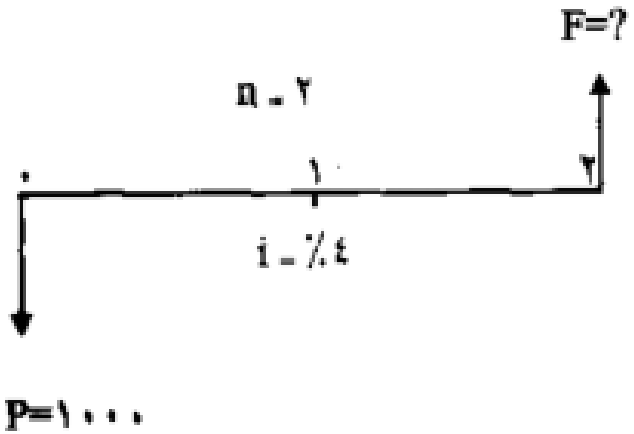
برای تشخیص رابطه بین نرخهای اسمی و موثر به‌مثال زیر می‌پردازیم. فرض کنید در جستجوی تعیین ارزش مبلغ ۱,۰۰۰ واحدپولی دریک سال بعد بانرخ ۸٪ درسال هستید. شکل فرآیند مالی زیر رابطه P و F را نشان‌می‌دهد و محاسبه F بطریق زیر انجام می‌شود:



$$F = P\,(1+i)^n = 1{,}000\,(1/08)^1 = 1080$$

نرخ ۸٪ در سال که در محاسبات فوق بکار رفته است نرخ اسمی سالیانه می‌باشد. اگر نحوه بیان نرخ را تغییر بدهیم و بگوئیم که نرخ، ۸٪ در سال باشد ولی بهره هر شش ماه یکبار دریافت می‌شود، شکل فرآیند مالی مثال فوق به صورت زیر است:





در شکل فوق مسئله نرخ بهره که هر شش ماه یکبار پرداخت می‌شود رعایت شده است. تفاوت دو شکل در این است که در شکل دوم، سال بصورت دو دوره شش ماهه و با نرخ ۴٪ در هر دوره نشان داده شده است. محاسبه F به ترتیب زیر است:

$$F = ۱,۰۰۰\ (۱/۰۴)^{۲} = ۱,۰۰۰\ (۱/۰۸۱۶)$$

$$F = ۱,۰۸۱/۶$$

اگرچه در شکل دوم، دوره دوبرابر شد ولی نرخ نیز به **نصف تقلیل یافت** و در حقیقت در پایان دوره اول مقدار ارزش آینده برابر است با:

$$F_1 = ۱,۰۰۰ \ (۱/۰۴) = ۱,۰۴۰$$

و در پایان دوره دوم:

$$F_2 = ۱,۰۴۰ \ (۱/۰۴) = ۱,۰۸۱/۶$$

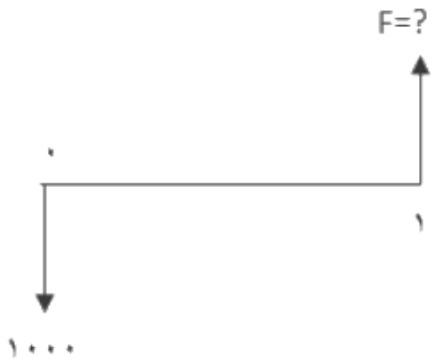
همانطور که مشاهده می‌شود در پایان دوره دوم، روی بهره حاصله در پایان دوره اول، که مقدار آن ۴۰ می‌باشد نیز بهره تعلق گرفته است و مفهوم متفاوت بودن جوابها را بهتر می‌توان مشاهده کرد. جواب ۱,۰۸۱/۶ را می‌توانستیم از طریق دیگری هم بدست آوریم. اگر نرخ را ۸/۱۶٪ در سال فرض می‌کردیم:

$$F = ۱,۰۰۰ \ (۱/۰۸۱۶) = ۱,۰۸۱/۶$$

مبلغ اولیه ۱۰۰۰ واحد پولی با نرخ بهره ۸٪ در سال سرمایه گذاری شده است. ارزش آن در یک سال آینده را محاسبه کنید در صورتیکه:

الف)بهره در پایان سال پرداخت شود.

$$F = 1000 * (1 + 0.08) = 1080$$

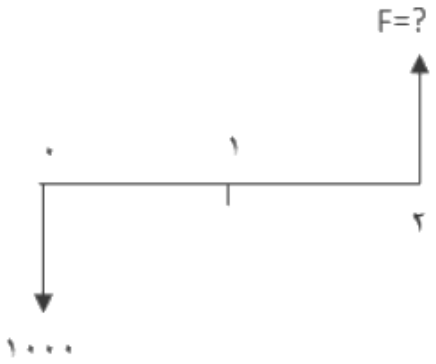


ب) بهره هر ۶ ماه یکبار پرداخت شود.

n=2

i=8/2=4%

$$F = 1000(1 + 0.04)^2 = 1081.6$$



$$F_1 = 1000(1 + 0.04) = 1040$$

$$F_2 = 1040(1 + 0.04) = 1081.6$$

نرخ بهره موثرسالیانه (i_e)

- ارزش زمانی پول مطرح است.
- بزرگتر از نرخ بهره اسمی است.
- بستگی به نوع مرکب شدن در سال دارد.
- هرچه تعداد مرکب شدن در سال بیشتر باشد نرخ بهره موثر سالیانه افزایش بیشتری خواهد داشت.

r: نرخ بهره اسمی در دوره

i_e: نرخ بهره موثر در دوره

t: تعداد مرکب شدن در دوره

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t - 1$$

و بدین‌ترتیب می‌توان رابطه بین دو نرخ موثر و اسمی را به ترتیب زیر نوشت:

$$(1 + i_e) = (1 + \frac{r}{t})^t$$

$$i_e = (1 + \frac{r}{t})^t - 1 \qquad (۵-۱)$$

در رابطه (۵-۱) پارامترها عبارتند از:

i_e = نرخ موثر در دوره[1]

r = نرخ اسمی در دوره[2]

t = تعداد مرکب شده در دوره[3]

1 - Effective Interest Rate

2 - Nominal Interest Rate

3 - Number of Compounding Periods

و بدین‌ترتیب می‌توان رابطه بین دو نرخ موثر و اسمی را به ترتیب زیر نوشت:

$$(1 + i_e) = (1 + \frac{r}{t})^t$$

$$i_e = (1 + \frac{r}{t})^t - 1 \qquad (۵-۱)$$

به مثال فوق بازمی‌گردیم که در آن نرخ، ٪۸ در سال ولی بهره هر شش ماه یکبار پرداخت می‌شد. داده‌های مسئله عبارتند از:

$r =$ ٪۸ در سال

$t = ۲$

و نرخ موثر سالیانه i_e عبارت است از:

$$i_e = (1 + \frac{۰/۰۸}{۲})^۲ - 1$$

$i_e =$ ۰/۰۸۱۶ یا ٪۸/۱۶

و همانطور که نشان داده شد می‌توان به ارزش آینده F = ۱,۰۸۱/۶ با استفاده از $i_e =$ ٪۸/۱۶ رسید.

در هر دوره ۳ ماهه

شخصی مبلغ ۵۰۰۰ واحد پولی را در شرکتی سرمایه گذاری نموده است که نرخ بهره آن ۴٪ در نظر گرفته شده است و هر ۳ ماه مرکب می شود. نرخ بهره اسمی و نرخ بهره موثر را محاسبه کنید.

$$r=4\%*4=16\%$$

$$i_e=(1+\frac{0.16}{4})^4-1=0.17$$

. با حل چند مثال به رابطه این دو نرخ، بیشتر پی می‌بریم:

● مثال ۱ـ۵ـ یک بانک صنعتی اعلام کرده است که نرخ بهره این بانک برای تاسیس واحدهای صنعتی ۱٪ در ماه است. نرخ موثر سالیانه را محاسبه کنید.

حل: نرخ اسمی سالیانه، طبق تعریف، از ضرب کردن تعداد مرکب شدن در سال، در ۱٪ بدست می‌آید.

نرخ اسمی سالیانه ۱۲٪ = ۱۲ × ۱٪

با استفاده از فرمول (۱ـ۵) داریم:

$$i_e = (1 + \frac{0/12}{12})^{12} - 1$$

$i_e =$ ۱۲/۶۸٪ نرخ موثر سالیانه

البته برای بدست آوردن نرخ موثر سالیانه، مجبور به محاسبه نرخ اسمی سالیانه نیستیم و می‌توانیم از رابطه زیر به جواب نرخ موثر سالیانه دست یابیم:

$$i_e = (1 + 0/01)^{12} - 1$$

$i_e =$ ۱۲/۶۸٪

اگر بهره به صورت ماهیانه مرکب شود و نرخ بهره موثر سالیانه ۰.۴۲۶ باشد نرخ بهره اسمی سالیانه چه مقدار خواهد بود؟

(۱۲ln۱/۰۳=ln۱.۴۶۲)

$$i_e = (1+\frac{r}{t})^t - 1 \rightarrow 0.462 = (1+\frac{r}{12})^{12} - 1$$

$$1.462 = (1+\frac{r}{12})^{12} \rightarrow \ln 1.462 = 12\ln(1+\frac{r}{12})$$

$$(1+\frac{r}{12}) = 1.03 \rightarrow r = 0.36 \rightarrow i = \frac{0.36}{12} = 0.03$$

. با حل چند مثال به رابطه این دو نرخ، بیشتر پی می‌بریم:

● مثال ۲ـ۵ـ شرکت «گل‌ابزار» قصد خرید یک ماشین صنعتی را به قیمت ۴۵,۰۰۰ واحد پولی دارد و بانکی حاضر است این مبلغ را به شرکت قرض بدهد. نرخ بانک ۱۲٪ در سال می‌باشد. شرکت باید مبلغ فوق را در مدت سه سال به اقساط ماهیانه پرداخت نماید. قسط ماهیانه شرکت چقدر خواهد بود.

حل:

نرخ ماهیانه = $\frac{۱۲٪}{۱۲}$ = ۱٪

دورهٔ پرداخت برحسب ماه = ۱۲ × ۳ = ۳۶

A = ۴۵,۰۰۰ (A/P ، ۱٪ ، ۳۶)

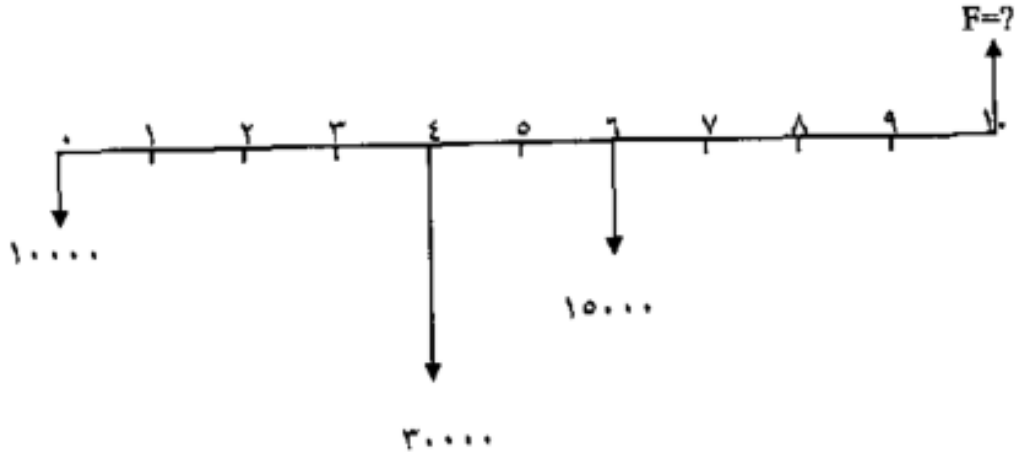
A = ۱,۴۹۴/۹

از آنجا که بهره، بصورت ماهیانه پرداخت می‌گردید و قسط ماهیانه مجهول بود، نرخ ماهیانهٔ محاسبه شده، می‌تواند بعنوان نرخ موثر ماهیانه نیز محسوب شود. (دورهٔ پرداخت مساوی با دورهٔ مرکب شدن می‌باشد)

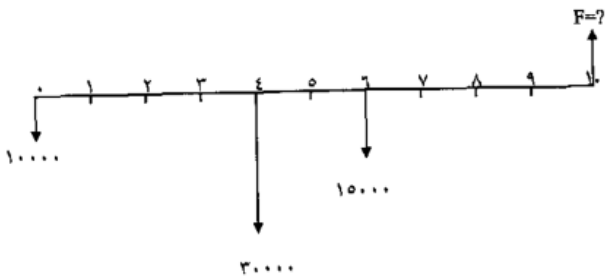
. با حل چند مثال به رابطه این دو نرخ، بیشتر پی می‌بریم:

● مثال ۵-۳ـ شخصی قصد دارد ۱۰,۰۰۰ واحد پولی را اکنون، ۳۰,۰۰۰ واحد پولی را چهار سال دیگر در چنین روزی و ۱۵,۰۰۰ واحد پولی را شش سال دیگر در چنین روزی با نرخ بهرهٔ سالیانهٔ ۶٪ برای فرزندش در بانکی پس‌انداز نماید. در صورتی که بهره، هر شش ماه یکبار به پس‌انداز تعلق گیرد، اصل و فرع (ارزش آینده) این پس‌اندازها پس از ده سال چقدر خواهد بود؟

حل: شکل فرآیند مالی:



حل: شکل فرآیند مالی:



. با حل چند مثال به رابطه این دو نرخ، بیشتر پی می‌بریم:

نرخ موثر سالیانه:

$$i_e = (۱ + \frac{۰/۰۶}{۲})^۲ - ۱$$

$$i_e = ۰/۰۶۰۹ \text{ یا } ٪۶/۰۹$$

$$F = ۱۰,۰۰۰\ (F/P\ ،\ ٪۶/۰۹\ ،\ ۱۰) + ۳۰,۰۰۰\ (F/P\ ،\ ٪۶/۰۹۰\ ،\ ۶)$$

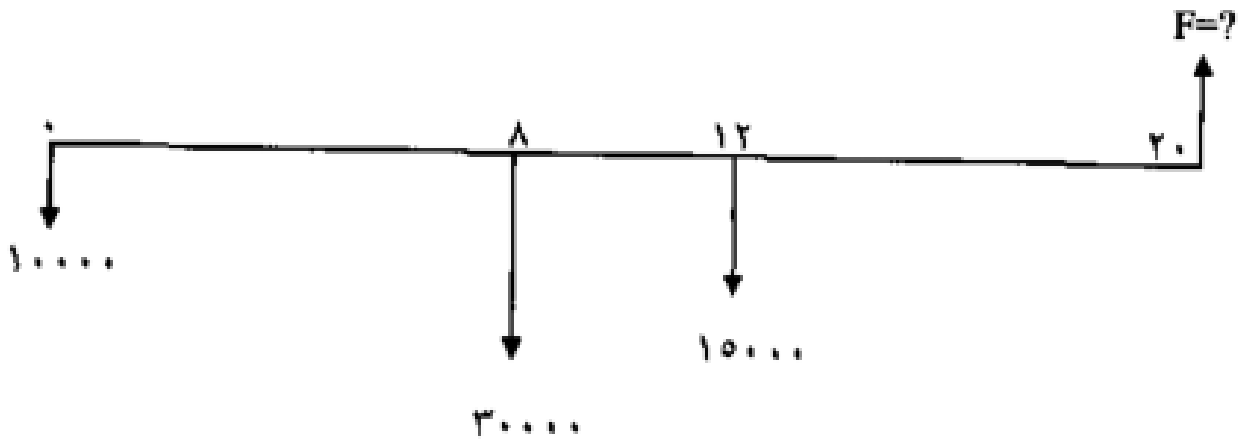
$$+ ۱۵,۰۰۰\ (F/P\ ،\ ٪۶/۰۹\ ،\ ۴)$$

$$F = ۷۹,۸۳۷$$

برای محاسبات فاکتورها در عبارت فوق، یا باید از روش درون‌یابی استفاده می‌شد و یا مقادیر i و n در رابطه $\frac{F}{P}$ قرار می‌گرفت که در هر دو صورت محاسبات طولانی می‌گردید.

. با حل چند مثال به رابطه این دو نرخ، بیشتر پی می‌بریم:

طریق دیگر حل مسئله بدین‌ترتیب است که چون بهره، هر شش ماه یکبار پرداخت می‌گردد، شکل فرآیند مالی بصورت زیر تغییر کند و در حقیقت مدت زمان، دوبرابر و نرخ سالیانه نصف شود:



$$F = ۱۰,۰۰۰\ (F/P\ ،\ ٪۳\ ،\ ۲۰) + ۳۰,۰۰۰\ (F/P\ ،\ ٪۳\ ،\ ۱۲)$$
$$+ ۱۵,۰۰۰\ (F/P\ ،\ ٪۳\ ،\ ۸)$$
$$F = ۷۹,۸۳۷$$

بدیهی است که حل مسئله به طریق دوم ساده‌تر از طریق اول است.

. با حل چند مثال به رابطه این دو نرخ، بیشتر پی می‌بریم:

● مثال ۴ـ۵ـ شخصی علاقمند است مبلغی را به عنوان سپرده ثابت در بانک پس‌انداز کند. نرخ بانک ۸٪ در سال و بهره، بصورت روزانه پرداخت می‌شود. نرخ موثر سالیانه و نرخ موثر شش ماهه را تعیین کنید.

حل: نرخ موثر سالیانه:

$$i_e = (1 + \frac{0/08}{365})^{365} - 1$$

$$i_e = 0/08325 \text{ یا } 8/325\%$$

نرخ موثر شش ماهه:

$$i_e = (1 + \frac{0/04}{182/5})^{182/5} - 1$$

در رابطه فوق نرخ اسمی شش ماهه عبارت از:

$$r = \frac{0/08}{2} = 0/04$$

و روزهای دوره شش ماهه برابر:

$$t = \frac{365}{2} = 182/5$$

$$i_e = 0/04081 \text{ یا } 4/081\%$$

می‌باشد.

مرکب شدن پیوسته

مثالهای فوق نشان داد که هرچه تعداد مرکب شدن در سال بیشتر باشد، نرخ موثر سالیانه افزایش بیشتری خواهد داشت. تعداد مرکب شدن در دوره گاهی برحسب ساعات یا حتی لحظات می‌تواند باشد که مرکب شدن پیوسته[1] را بوجود می‌آورد. بخصوص در کشورهای غربی بعضی از مراکز مالی یا بانکها دارای چنین نرخی برای متقاضیان هستند. در مرکب شدن پیوسته، سال به تعداد بی‌نهایت دوره تقسیم می‌شود.

رابطه F/P را بصورت کلی: $F = (1 + \frac{r}{t})^{tn}$ می‌نویسیم که در آن:

r = نرخ اسمی سالیانه

t = تعداد مرکب شدن در سال

n = تعداد سال

اگر تعداد مرکب شدن (t) به سمت ∞ میل کند خواهیم داشت:

1 - Continuous Compounding

بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$F = Pe^{r.n} \qquad (۵-۲)$$

بدیهی است که مقدار e = ۲/۷۱۸۲۸ می‌باشد.

فرمول کلی رابطه (۵-۲) بصورت زیر است:

$$F = P\,(F/P\,،\,r\,،\,n)^{\infty}$$

رابطه (۵-۳) را می‌توان از رابطه (۵-۲) نتیجه گرفت:

$$P = F\,e^{-r.n} \qquad (۵-۳)$$

این رابطه دارای فرمول کلی زیر نیز می‌باشد:

$$P = F\,(P/F\,،\,r\,،\,n)^{\infty}$$

نرخ موثر مرکب پیوسته از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$i_e = e^{r} - ۱$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$i_e = \lim_{t \to \infty}\left(\left(1+\frac{r}{t}\right)^{t} - 1\right) = e^{r} - 1$$

جایگزینی نرخ بهره جدید در فاکتورهای قبلی:

مثال:

$$i_e = \lim_{t \to \infty}\left(\left(1+\frac{r}{t}\right)^t - 1\right) = e^r - 1$$

$$(1+i)^n \ldots\ldots e^{rn} \to (F/P, r, n)^{\infty}$$

$$F = P(1+i)^n \ldots\ldots F = Pe^{rn}$$

بطورکلی جدول (۱-۵) فاکتورهای مختلف را برای تعیین پارامترهای مختلف معین نموده است:

فرم استاندارد فاکتور	فاکتور	پارامتر معلوم	پارامتر مجهول
$(P/F,r,n)^{\infty}$	$e^{-r.n}$	F	P
$(F/P,r,n)^{\infty}$	$e^{r.n}$	P	F
$(F/A,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}-1}{e^{r}-1}$	A	F
$(A/F,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r}-1}{e^{r.n}-1}$	F	A
$(P/A,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}-1}{e^{r.n}(e^{r}-1)}$	A	P
$(A/P,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}(e^{n}-1)}{e^{r.n}-1}$	P	A
$(P/G,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}-1-n(e^{r}-1)}{e^{r.n}(e^{r}-1)^{2}}$	G	P
$(A/G,r,n)^{\infty}$	$\frac{1}{e^{r}-1}-\frac{n}{e^{r.n}-1}$	G	A

جدول ۱-۵

اگر ۳۰۰۰۰۰ واحد پول با نرخ ۱۲٪ به طور مرکب پیوسته سرمایه گذاری شود مقدار اصل و فرع پس از ۷ سال چقدر خواهد بود؟

$$F = Pe^{r.n} \Rightarrow F = 300000 * e^{0.12*7} = 694890$$

● مثال ۵ـ۵ـ اگر ۲۰۰,۰۰۰ واحد پولی با نرخ ۱۲٪ در سال بطور مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری شود، پس از ۵ سال اصل و فرع چقدر خواهد شد؟

حل:

$F = P\,(F/P\,،\,\%۱۲\,،\,۵)^{\infty}$

$F = ۲۰۰,۰۰۰\,(۱/۸۲۲۱)$

$F = ۳۶۴,۴۲۰$

● مثال ۶ـ۵ـ فرض کنید شخصی ۱۰,۰۰۰ واحد پولی در سال، در بانکی پس‌انداز می‌کند. نرخ بانک ۱۲٪ مرکب پیوسته می‌باشد. ارزش فعلی و ارزش آینده این پرداختهای مساوی را پس از دهمین پس‌انداز محاسبه نمائید.

حل:

$P = A\,(P/A\,،\,٪۱۲\,،\,۱۰)^{\infty}$

$P = ۱۰,۰۰۰\,(۵/۴۸۱۰)$

$P = ۵۴,۸۱۰$

$F = ۱۰,۰۰۰\,(F/A\,،\,٪۱۲\,،\,۱۰)^{\infty}$

$F = ۱۰,۰۰۰\,(۱۸/۱۹۷۴)$

$F = ۱۸۱,۹۷۴$

دوره پرداختهای خاص

تعداد دوره مرکب شدن در سال با دوره های پرداخت/ دریافت متفاوت است:

t: تعداد دفعات مرکب شدن در سال

p: تعداد دفعات پرداخت/ دریافت در سال

- مرکب شدن غیرپیوسته

$$i_e = (1 + \frac{r}{t})^{\frac{t}{p}} - 1$$

- مرکب شدن پیوسته

$$i_e = e^{\frac{r}{p}} - 1$$

دوره پرداختهای خاص

در یک جریان مالی با نرخ بهره سالیانه ۱۵٪ که هر ساله مرکب شده اما پرداخت های آن هر ۴ سال اتفاق می افتد اگر تا ۲۰ سال هر ساله مبلغ ۱۰۰۰ واحد پولی سرمایه گذاری شود، ارزش فعلی آن را بیابید.

t =1

P=1/4

$$i_e = (1+\frac{0.15}{1})^{\frac{1}{1/4}} - 1 = 74.9\%$$

$$P = A*(P/A, i_e, np) = 1000*(P/A, 74.9\%, 5)$$

t: تعداد دفعات مرکب شدن در سال

p: تعداد دفعات پرداخت/ دریافت در سال

- مرکب شدن غیرپیوسته

$$i_e = (1+\frac{r}{t})^{\frac{t}{p}} - 1$$

- مرکب شدن پیوسته

$$i_e = e^{\frac{r}{p}} - 1$$

شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰ واحد پولی در بانک پس انداز می کند. ارزش آینده این پس اندازها پس از ۱۰ سال چقدر خواهد شد اگر نرخ بهره سالیانه ۱۵٪ و بهره به طور مرکب پیوسته پرداخت شود.

مرکب شدن پیوسته $F = Pe^{r.n}$

$$F = 10000\, e^{0/15(10)}$$

$$F = 44816/89$$

مسائل فصل پنجم

- ۵-۱ نرخ اسمی سالیانه چقدر خواهد بود اگر نرخ بهرهٔ هر دو هفته (پانزده روز) ۰/۵٪ باشد.

- ۵-۲ نرخ اسمی و موثر سالیانه را اگر نرخ بهره ۱/۵٪ در ماه باشد محاسبه کنید.

- ۵-۳ نرخ اسمی و موثر سالیانه را اگر نرخ بهره ۸٪ در هر شش ماه باشد محاسبه کنید.

- ۵-۴ شرکت «گلدُر» یک ماشین سواری را به قیمت ۵۵,۰۰۰ واحد پولی می‌خرد. قرار است شرکت مبلغ ۲,۰۰۰ واحد پولی در ماه برای مدت ۳۶ ماه بپردازد تا کل قیمت سواری پرداخت شود. نرخ اسمی و موثر سالیانه چقدر است؟

- ۵-۵ اگر انتظار برود که ارزش آیندهٔ یک سری پرداختهای یکنواخت ماهیانه ۵,۰۰۰ واحد پولی باشد، مقدار هزینه ماهیانه چقدر خواهد بود. نرخ بهره سالیانه ۱۸٪ در سال و بهره بصورت روزانه پرداخت می‌شود.

مسائل فصل پنجم

● ۵-۶ـ اگر خانواده‌ای ۵,۰۰۰ واحد پولی را اکنون، ۲,۰۰۰ واحد پولی را در پایان سال سوم و ۳,۰۰۰ واحد پولی را در پایان سال پنجم برای فرزندشان پس‌انداز نمایند و نرخ سالیانه ۲۰٪ و بهره هر سه ماه یک‌بار پرداخت گردد، اصل و فرع در سال ششم چقدر خواهد بود.

● ۵-۷ـ شرکت صنایع چوبی «گلرنگ» مبلغ ۱۴۰,۰۰۰ واحد پولی برای خرید یک ماشین نجاری پرداخت کرده است. این ماشین با سرعت عمل خود قادر است هر ماه از هزینه‌های کارگری مبلغی را کاهش دهد. این کاهش هزینه یا صرفه‌جوئی در پرداخت حقوق و دستمزد کارگردان باید چقدر در ماه باشد تا مبلغ کل ماشین نجاری خریداری شده تامین شود. نرخ موثر سالیانه ۱۲/۶۸٪ است و مدتی که شرکت علاقمند است مبلغ اولیه ماشین بوسیله صرفه‌جوئی‌های سالیانه جبران شود ۲/۵ سال است.

مسائل فصل پنجم

● ۵ـ۸ـ خانواده‌ای دارای یک فرزند ۳ ساله هستند و علاقمندند وقتی او به سن ۱۸ سالگی رسید و وارد دانشگاه شد مبلغ ۱۰۰,۰۰۰ واحد پولی در حساب بانکی فرزندشان باشد تا مخارج تحصیلی دانشگاهی او پرداخت شود. این خانواده هم‌اکنون چه مبلغی را باید در بانک پس‌انداز نماید تا ارزش آینده این پس‌انداز ۱۰۰,۰۰۰ واحد پولی شود. نرخ بانک ۱۸٪ در سال و بهره بصورت ماهیانه پرداخت می‌شود.

● ۵ـ۹ـ اگر شخصی همه‌ماهه مبلغ ۷,۵۰۰ واحد پولی در بانک پس‌انداز نماید پس از ده سال چه مقدار در حساب او خواهد بود. نرخ بهره ۱۲٪ در سال و بهره بصورت ماهیانه پرداخت می‌شود.

● ۵ـ۱۰ـ شخصی سالانه مبلغ ۱۰,۰۰۰ واحد پولی در بانک پس‌انداز می‌نماید. ارزش آینده این پس‌اندازها پس از ۱۰ سال چقدر خواهد شد اگر نرخ بهره سالیانه ۱۵٪ و بهره بطور مرکب پیوسته پرداخت شود.

مسائل فصل پنجم

● ۵-۱۱. شخصی هر شش ماه یکبار مبلغ ۵,۰۰۰ واحد پولی را در بانک پس‌انداز می‌کند و نرخ بانک ۱۲٪ مرکب پیوسته می‌باشد. ارزش آینده این مبلغ پس از ۱۰ سال چقدر خواهد بود.

● ۵-۱۲. شخصی چهار پرداخت را به میزان ۱,۰۰۰ در دوره‌های ۳ ، ۲ ، ۱ = t (دوره برحسب سه ماه تنظیم شده) با نرخ ۸٪ مرکب پیوسته پس‌انداز می‌نماید و می‌خواهد هم در دورهٔ ۷ = t و هم در ۱۰ = t دریافت معین و ثابت X را داشته باشد. طول این پس‌انداز در ۱۰ = t پایان می‌پذیرد. مقدار X را معین نمائید.