

درس: اقتصاد مهندسی

مدرس: دکتر محسن کیا

بخش اول

مفاهیم اساسی اقتصاد مهندسی

- فصل اول : مقدمه
- فصل دوم : اصول پایه‌ای در اقتصاد مهندسی
- فصل سوم : معرفی و کاربرد فاکتورها
- فصل چهارم : حالت‌های مخصوص فرآیند مالی
- فصل پنجم : نرخ‌های اسمی و موثر

بخش اول

مفاهیم اساسی اقتصاد مهندسی

فصل سوم


معرفی و کاربرد فاکتورها

هدف از این فصل معرفی، شناخت و کاربرد فاکتورهای مهم و اساسی در اقتصاد مهندسی است. این فاکتورها در حقیقت روابط بین پارامترهای معرفی شده در فصل دوم را نشان می‌دهند و کلیه محاسبات اقتصادی بر مبنای این فاکتورها بنا شده‌اند.

مقدمه

ارزش زمانی در زمان های مختلف به سه حالت قابل ارائه است:

- سرمایه اولیه یا ارزش فعلی سرمایه (P)
- اصل و فرع یا ارزش آینده سرمایه (F)
- هزینه و درآمد مساوی و یکنواخت در پایان هر دوره (A)



راهی برای تبدیل ارزش زمانی به هر
یک از حالت های سه گانه

روابط بین P و F (الف) P معلوم و F مجهول

فرض کنید می‌خواهیم ارزش آینده یا اصل و فرع (F) برای مبلغ (P) در مدت n دوره (سال) با نرخ بهره (i) محاسبه نماییم. فرض می‌شود P در t یا ابتدای دوره سرمایه‌گذاری شود، اگر F_1 ارزش آینده مبلغ P پس از یک سال باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$F_1 = P + Pi$$

$$F_1 = P (1 + i)$$

اگر F_2 ارزش آینده مبلغ P پس از دو سال باشد، روابط زیر نیز برقرار است:

$$F_2 = F_1 + F_1 i$$

$$= P (1 + i) + P (1 + i) i$$

$$= P (1 + i + i + i^2) \Rightarrow F_2 = P (1 + i)^2$$

به همین ترتیب مقدار F_3 عبارت است از:

$$F_3 = F_2 + F_2 i$$

$$= [P(1+i) + P(1+i)i] + [P(1+i) + P(1+i)i]i$$

$$= P(1+i) + 2P(1+i)i + P(1+i)i^2$$

$$= P(1+i)(1+2i+i^2)$$

$$F_3 = P(1+i)^3$$

و بطور کلی رابطه زیر بین F و P برقرار است:

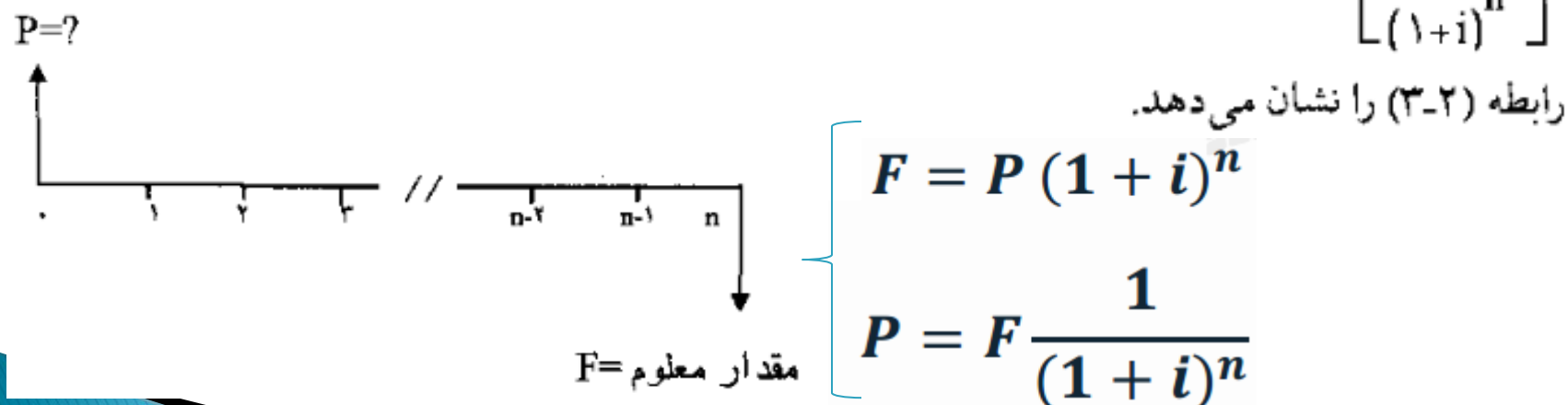
$$F = P(1+i)^n \quad (3-1)$$

فاکتور $(1+i)^n$ بنام «فاکتور یکبار پرداخت»^۱ معروف است. از فرمول (۳-۱) می توان نتیجه گرفت:

$$P = F \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (3-2) \quad \text{ب) } F \text{ معلوم و } P \text{ مجهول}$$

رابطه فوق زمانی استفاده می شود که مقدار F معلوم و P مجهول باشد. فاکتور

$$\left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] \text{ بنام «فاکتور ارزش فعلی یکبار پرداخت»}^2 \text{ معروف است. فرآیند مالی زیر}$$



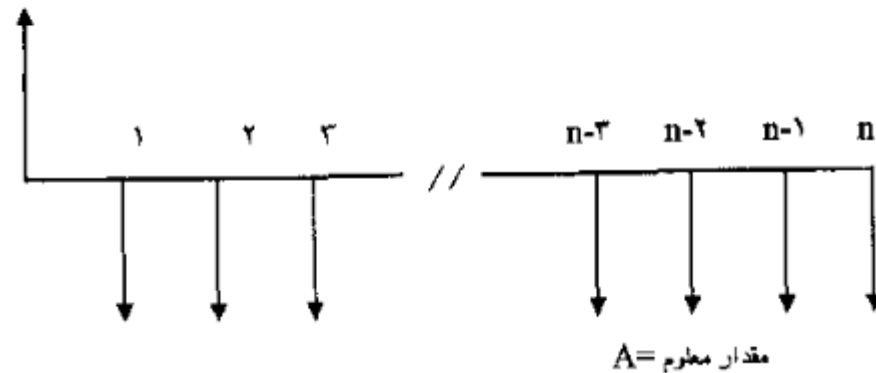
1 - Single - Payment Compound - Amount Factor

2 - Single - Payment Present Worth Factor

روابط بین P و A

فرآیند مالی زیر رابطه بین P و A را بهتر نمایان می سازد:

P=?



A معلوم و P مجهول

ارزش فعلی (P) یکسری پرداخت های یکسان (A) را می توان با فرض اینکه هر پرداخت (A) نقش (F) را ایفا می کند و با استفاده از فرمول (۳-۲) تعیین کرد:

$$P = A \left[\frac{1}{(1+i)^1} \right] + A \left[\frac{1}{(1+i)^2} \right] + A \left[\frac{1}{(1+i)^3} \right] + \dots$$

$$+ A \left[\frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + A \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

روابط بین P و A

فرآیند مالی زیر رابطه بین P و A را بهتر نمایان می سازد:

از مقدار A فاکتور گرفته می شود و رابطه زیر حاصل می گردد:

$$P = A \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (3-3)$$

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

فاکتور $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$ «فاکتور ارزش فعلی سری یکنواخت»¹ نامیده می شود.

روابط بین P و A

فرآیند مالی زیر رابطه بین P و A را بهتر نمایان می سازد:

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

فاکتور $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$ «فاکتور ارزش فعلی سری یکنواخت»^۱ نامیده می شود.

$$A = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

(۳-۶) P معلوم و A مجهول

فاکتور $\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ «فاکتور باز یافت سرمایه»^۱ نامیده می شود و در حقیقت

سرمایه (P) را با توجه به نرخ بهره (i) در مدت (n) دوره به پرداخت های مساوی یکنواخت توزیع می کند.

$$A = P \left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

$$P = A \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right)$$

مثال (۱)

شخصی مبلغ ۱۰۰۰۰۰ واحد پولی برای مدت ۵ سال با نرخ بهره ۱۲٪ در پروژه ای سرمایه گذاری کرده است. طبق توافق صورت گرفته سود متعلقه به صورت سالانه به شخص پرداخت می شود. میزان سود دریافتی سالیانه فرد را محاسبه کنید.



$$A = 100000 \left(\frac{0.12(1+0.12)^5}{(1+0.12)^5 - 1} \right) = 27741$$

روابط بین F و A

اگر به جای (P) در رابطه (۳-۶) مقدار رابطه (۳-۲) را قرار دهیم رابطه بین (A) و (F) حاصل می شود:

F معلوم و A مجهول

$$A = F \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (3-7)$$

فاکتور $\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$ «فاکتور وجوه استهلاکی»^۲ نامیده می شود و مقدار ارزش

آینده یا اصل و فرع (F) را با توجه به نرخ بهره (i) در مدت (n) دوره به پرداختهای مساوی توزیع می‌کند. رابطه زیر بسادگی از رابطه (۳-۷) بدست می‌آید:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad \text{A معلوم و F مجهول} \quad (3-8)$$

فاکتور $\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$ «فاکتور پرداخت مساوی برای مقدار مرکب»^۱ نامیده شده و مقدار پرداخت مساوی و یکنواخت را با توجه به نرخ بهره (i) در مدت (n) دوره به ارزش آینده تبدیل می‌کند.

$$A = F \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right)$$

$$F = A \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

جدول فاکتورها

برای جلوگیری از محاسبات مداوم و تکراری مقدار فاکتورهای یادشده، جدول فاکتورها در پایان کتاب (ضمیمه یک) ارائه شده است. این جداول کلیه فاکتورها را با نرخهای متنوع، از ۰/۲۵٪ تا ۰/۵۰٪، و دورههای متفاوت از ۱ تا ۱۰۰، محاسبه و هر فاکتور را به صورت فرم استاندارد $(X/Y, i\%, n)$ نمایش داده است. Y پارامتر معلوم و X پارامتر مجهول است. مثلاً مقدار فاکتور $(P/A, 0.5\%, 10)$ را می توان براحتی در صفحه مربوط به نرخ ۰/۵٪ در دوره دهم یافت که مقدار آن، $7/7217$ ، را همچنین می توان از فرمول (۳-۵) به طریق زیر نیز بدست آورد.

$$(P/A, 0.5\%, 10) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$
$$= \frac{(1 + 0/0.5)^{10} - 1}{0/0.5 (1 + 0/0.5)^{10}} = 7/7217$$

فاکتور استاندارد

X : پارامتر معلوم

Y : پارامتر مجهول

$(Y/X, i\%, n)$: فاکتور استاندارد

ضمیمہ A :

جدول فاکتورها

TABLE A-1

0.25% COMPOUND INTEREST FACTORS

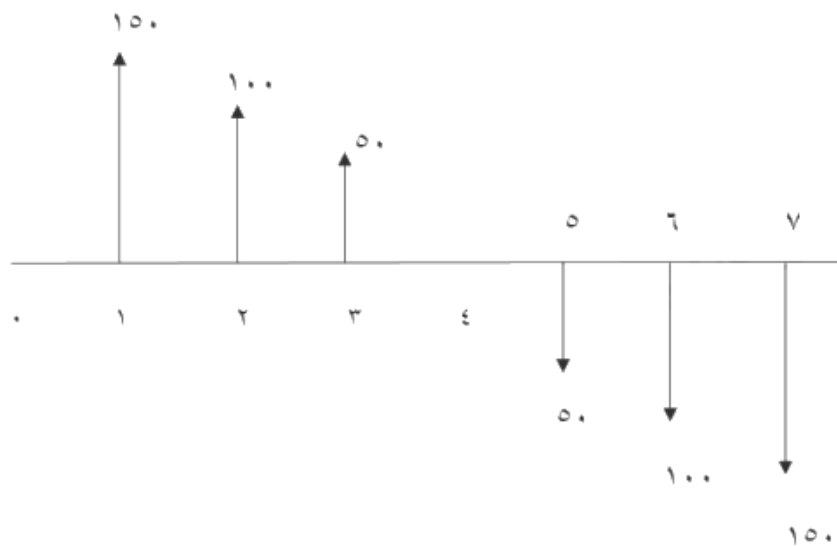
SINGLE PAYMENTS			UNIFORM SERIES PAYMENTS				
	COMPOUND AMOUNT	PRESENT WORTH	SINKING FUND	COMPOUND AMOUNT	CAPITAL RECOVERY	PRESENT WORTH	
N	F/P	P/F	A/F	F/A	A/P	P/A	N
1	1.0025	0.9975	1.00017	0.9998	1.00267	0.9973	1
2	1.0050	0.9950	0.49951	2.0020	0.50201	1.9920	2
3	1.0075	0.9925	0.33259	3.0067	0.33509	2.9843	3
4	1.0100	0.9901	0.24912	4.0142	0.25162	3.9743	4
5	1.0126	0.9876	0.19905	5.0240	0.20155	4.9616	5
6	1.0151	0.9851	0.16566	6.0364	0.16816	5.9466	6
7	1.0176	0.9827	0.14181	7.0515	0.14431	6.9293	7
8	1.0202	0.9802	0.12393	8.0688	0.12643	7.9093	8
9	1.0227	0.9778	0.11002	9.0889	0.11252	8.8870	9
10	1.0253	0.9753	0.09890	10.1112	0.10140	9.8619	10
11	1.0278	0.9729	0.08979	11.1366	0.09229	10.8350	11
12	1.0304	0.9705	0.08221	12.1643	0.08471	11.8053	12
13	1.0330	0.9681	0.07579	13.1943	0.07829	12.7730	13
14	1.0356	0.9657	0.07029	14.2273	0.07279	13.7386	14
15	1.0382	0.9632	0.06552	15.2626	0.06802	14.7017	15

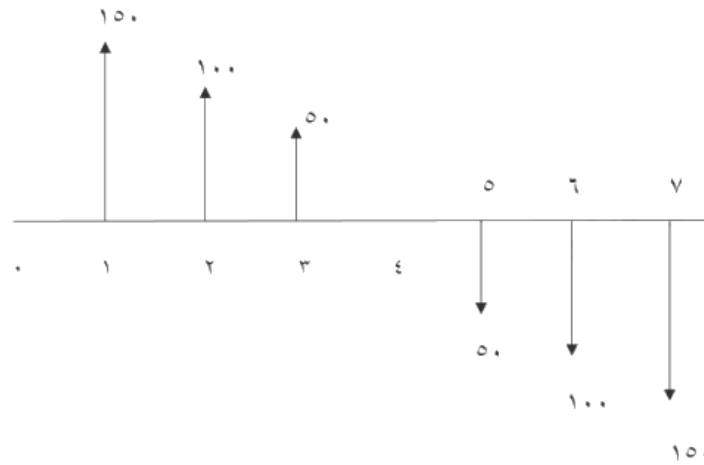
جدول فاکتورها

پارامتر مجهول	پارامتر معلوم	فاکتور استاندارد	فرمول
P	F	$(P/F, i\%, n)$	$F.(P/F, i\%, n)$
F	P	$(F/P, i\%, n)$	$P.(F/P, i\%, n)$
P	A	$(P/A, i\%, n)$	$A.(P/A, i\%, n)$
A	P	$(A/P, i\%, n)$	$P.(A/P, i\%, n)$
A	F	$(A/F, i\%, n)$	$F.(A/F, i\%, n)$
F	A	$(F/A, i\%, n)$	$A.(F/A, i\%, n)$

مثال (۲)

ارزش فعلی در فرایند مالی زیر با فرض نرخ بهره ۲۰٪ را بدست آورید.





الف) فاکتور محاسباتی

$$P = \frac{150}{(1+i)} + \frac{100}{(1+i)^2} + \frac{50}{(1+i)^3} + 0 - \frac{50}{(1+i)^5} - \frac{100}{(1+i)^6} - \frac{150}{(1+i)^7} = 127.929$$

$$\begin{aligned} P &= 150(P/F, 20\%, 1) + 100(P/F, 20\%, 2) + 50(P/F, 20\%, 3) \\ &\quad - 50(P/F, 20\%, 5) - 100(P/F, 20\%, 6) - 150(P/F, 20\%, 7) = \\ &= 150 * 0.8333 + 100 * 0.6944 + 50 * 0.5787 - 50 * 0.4019 - \\ &\quad 100 * 0.3349 - 150 * 0.2791 = 127.929 \end{aligned}$$

ب) فاکتور استاندارد

درون یابی خطی

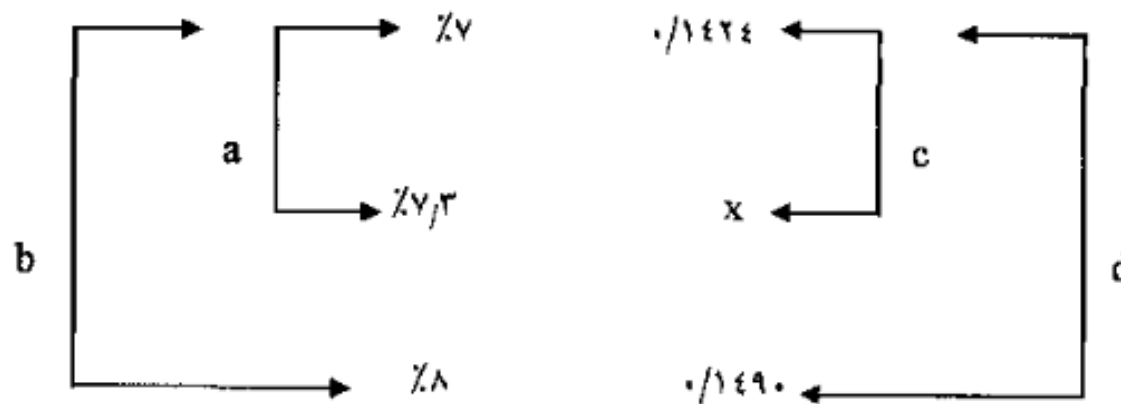
گاهی برای یک مقدار مشخص i ، یا یک دوره مشخص n ، مقدار فاکتور در جدول موجود نیست. مثلاً فاکتور $(A/P, 7/3, 10)$ که نرخ $i = 7/3\%$ در جدول موجود نیست. برای نرخهای 7% و 8% در مدت ۱۰ سال فاکتور A/P را می توان از جدول بدست آورد. مقدار $(A/P, 7/3, 10)$ را نمی توان از جدول یافت مگر با «درون یابی»^۱ خطی بین نرخهای بیشتر و کمتر از $7/3\%$ که 7% و 8% می باشند. رابطه خطی می تواند صحیح باشد، اگر دو عدد کمتر یا بیشتر از پارامتر مجهول (i یا n) نزدیک به آن پارامتر باشند.

مقدار یک فاکتور در جدول وجود ندارد:

۱. به ازای یک مقدار i

۲. به ازای یک مقدار n

۳. به ازای i, n



مقادیر a و b و c عبارت از تفاضل بین اعداد تشکیل دهنده آن مقادیر است. رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$c = \frac{a}{b} d$$

(۳-۹)

$$c = \frac{7/3-7}{8-7} (0/1490 - 0/1424)$$

$$c = \frac{0/3}{1} (0/0066)$$

$$c = 0/00198$$

از آنجا که مقدار فاکتور A/P از ۷٪ به ۸٪ در حال افزایش است (از ۰/۱۴۲۴ به ۰/۱۴۹۰) مقدار C باید به مقدار فاکتور در ۷٪، یعنی ۰/۱۴۲۴ اضافه شود تا مقدار فاکتور مجهول X به دست آید:

$$X = 0/1424 + 0/00198 = 0/14438$$

بدیهی است که همیشه امکان محاسبه این گونه فاکتورها از طریق روابط ارائه شده بین پارامترها با قراردادن i و n میسر می باشد.

مقدار فاکتور (F/A, 37%,24) را آورید.

$$(F/A, 35\%,24)=3833.673$$

$$(F/A, 40\%,24)= 8032.949$$

ادامه مثال (۳)

I		F/A	
B	A	۳۵%	۳۸۳۳,۶۷۳
		۳۷%	x
		۴۰%	۸۰۳۲,۹۴۹
		C	D

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$c = \frac{37-35}{40-35} * (8032.949 - 3833.673)$$

$$c = \frac{2}{5} * 4199.279 = 1679.71$$

$$x = 3833.673 + c = 5513.383 = (F/A, 37\%, 24)$$

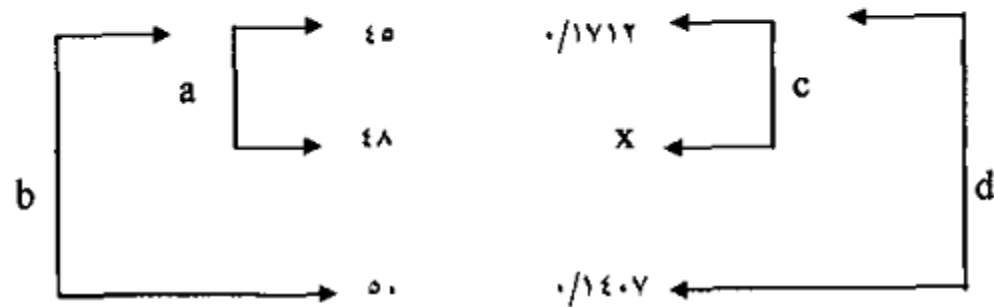
● مثال ۳-۱. مقدار $(P/F, \%, 48)$ را از جدول بدست آور، بد:

TABLE A-8

4.00% COMPOUND INTEREST FACTORS

SINGLE PAYMENTS			UNIFORM SERIES PAYMENTS	
N	COMPOUND AMOUNT F/P	PRESENT WORTH P/F	SINKING FUND A/F	
30	3.2434	0.3083	0.01783	
32	3.5081	0.2851	0.01595	
34	3.7943	0.2636	0.01431	
35	3.9461	0.2534	0.01358	
36	4.1639	0.2437	0.01289	
38	4.4388	0.2253	0.01163	
40	4.8010	0.2083	0.01052	
45	5.8412	0.1712	0.00826	
50	7.1067	0.1407	0.00655	
55	8.6463	0.1157	0.00523	

حل: فاکتور فوق در $n = 48$ در جدول موجود نیست ولی در $n = 45$ و $n = 50$ مقدار P/F مشخص است. تناسب زیر پس از یافتن مقادیر $(P/F, \%, 45)$ و $(P/F, \%, 50)$ از جدول فاکتورها تشکیل می شود:



با استفاده از رابطه (۳-۹):

$$C = \frac{a}{b} \cdot d$$

$$C = \frac{48 - 45}{50 - 45} (0.1712 - 0.1407)$$

$$C = 0.1183$$

از آنجا که فاکتور P/F از ۴۵ به ۵۰ در حال کاهش است (از ۰/۱۷۱۲ به ۰/۱۴۰۷) مقدار C باید از مقدار فاکتور در ۴۵، یعنی ۰/۱۷۱۲ کاسته شود.

$$X = 0.1712 - 0.1183 = 0.1529$$

مقدار فاکتور $(A/F, 8\%, 31)$ را محاسبه کنید..

$$(A/F, 8\%, 30) = 0.00883$$

$$(A/F, 8\%, 32) = 0.00745$$

n		A / F	
b	a	30	0.00883
		x	
		32	0.00745

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \frac{31 - 30}{x - 0.00883} = \frac{32 - 30}{0.00745 - 0.00883}$$

$$x = 0.00814 \Rightarrow \left(\frac{F}{A}, 8\%, 31 \right) = 0.00814$$

i	P/F (n=45)	P/F (n=50)
10	0.0137	0.0085
11	X	Y
12	0.0061	0.0035



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$c = \frac{11-10}{12-10} * (0.0061 - 0.0137)$$

$$c = \frac{1}{2} * (-0.0076) = -0.0038$$

$$x = 0.0137 + c = 0.0099 = (P/F, 11\%, 45)$$

i	P/F (n=45)	P/F (n=50)
10	0.0137	0.0085
11	X	Y
12	0.0061	0.0035



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$c = \frac{11-10}{12-10} * (0.0035 - 0.0085)$$

$$c = \frac{1}{2} * (-0.005) = -0.0025$$

$$y = 0.0085 + c = 0.006 = (P/F, 11\%, 50)$$

مقدار فاکتور (P/F, 11%, 47) را آورید.

$$(P/F, 10\%, 45) = 0.0137$$

$$(P/F, 10\%, 50) = 0.0085$$

$$(P/F, 12\%, 45) = 0.0061$$

$$(P/F, 12\%, 50) = 0.0035$$

مقدار فاکتور $(P/F, 11\%, 47)$ را آورید.

n	P/F
45	0.0099
47	z
50	0.006



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$c = \frac{47 - 45}{50 - 45} * (0.006 - 0.0099)$$

$$c = \frac{2}{5} * (-0.0039) = -0.0016$$

$$z = 0.0099 + c = 0.0083 = (P/F, 11\%, 47)$$

$$(P/F, 10\%, 45) = 0.0137$$

$$(P/F, 10\%, 50) = 0.0085$$

$$(P/F, 12\%, 45) = 0.0061$$

$$(P/F, 12\%, 50) = 0.0035$$

● مثال ۳-۲ مقدار فاکتور (P/A ، $\% ۱۳$ ، ۴۲) را از طریق جدول محاسبه کنید.

TABLE A-15

12.00% COMPOUND INTEREST FACTORS

SINGLE PAYMENTS			UNIFORM SERIES PAYMENTS				
	COMPOUND AMOUNT	PRESENT WORTH	SINKING FUND	COMPOUND AMOUNT	CAPITAL RECOVERY	PRESENT WORTH	
N	F/P	P/F	A/F	F/A	A/P	P/A	N
38	74.1794	0.0135	0.00164	609.828	0.12164	8.2210	38
40	93.0506	0.0107	0.00130	767.088	0.12130	8.2438	40
45	163.987	0.0061	0.00074	1358.225	0.12074	8.2825	45
50	289.000	0.0035	0.00042	2400.006	0.12042	8.3045	50

TABLE A-16

15.00% COMPOUND INTEREST FACTORS

SINGLE PAYMENTS			UNIFORM SERIES PAYMENTS				
	COMPOUND AMOUNT	PRESENT WORTH	SINKING FUND	COMPOUND AMOUNT	CAPITAL RECOVERY	PRESENT WORTH	
N	F/P	P/F	A/F	F/A	A/P	P/A	N
38	202.541	0.0049	0.00074	1343.606	0.15074	6.6338	38
40	267.860	0.0037	0.00056	1779.067	0.15056	6.6418	40
45	538.761	0.0019	0.00028	3585.076	0.15028	6.6543	45
50	1083.639	0.0009	0.00014	7217.598	0.15014	6.6605	50

i	n = ۴۰	n = ۴۵
%۱۲	۸/۲۴۳۸	۸/۲۸۲۵
%۱۳	X۴۰	X۴۵
%۱۵	۶/۶۴۱۸	۶/۶۵۴۳

حل: از آنجا که مقادیر $i = \% ۱۳$ و $n = ۴۲$ در جدول وجود ندارند، یک درونیابی دوطرفه باید انجام شود. اولین مرحله محاسبه فاکتور مذکور، تشکیل تناسب زیر و محاسبه P/A در $i = \% ۱۳$ برای $n = ۴۰$ و $n = ۴۵$ است:

● مثال ۳-۲ مقدار فاکتور $(P/A, \%, ۱۳, ۴۲)$ را از طریق جدول محاسبه کنید.

محاسبات مربوط به $X_{۴۰}$ و $X_{۴۵}$ در ذیل آمده است:

$$C_{۴۰} = \frac{1}{3} (1/6020) = 0.05340$$

$$X_{۴۰} = 8/2438 - 0.05340 = 7/7098$$

$$C_{۴۵} = \frac{1}{3} (1/6282) = 0.05227$$

$$X_{۴۵} = 8/2825 - 0.05227 = 7/7398$$



i	n = ۴۰	n = ۴۵
%۱۲	8/2438	8/2825
%۱۳	$X_{۴۰}$	$X_{۴۵}$
%۱۵	6/6418	6/6543



حال مقدار فاکتور P/A در $n = ۴۲$ طبق تناسب زیر حاصل خواهد شد:

P/A	n
$7/7098$	۴۰
$X_{۴۲}$	۴۲
$7/7398$	۴۵

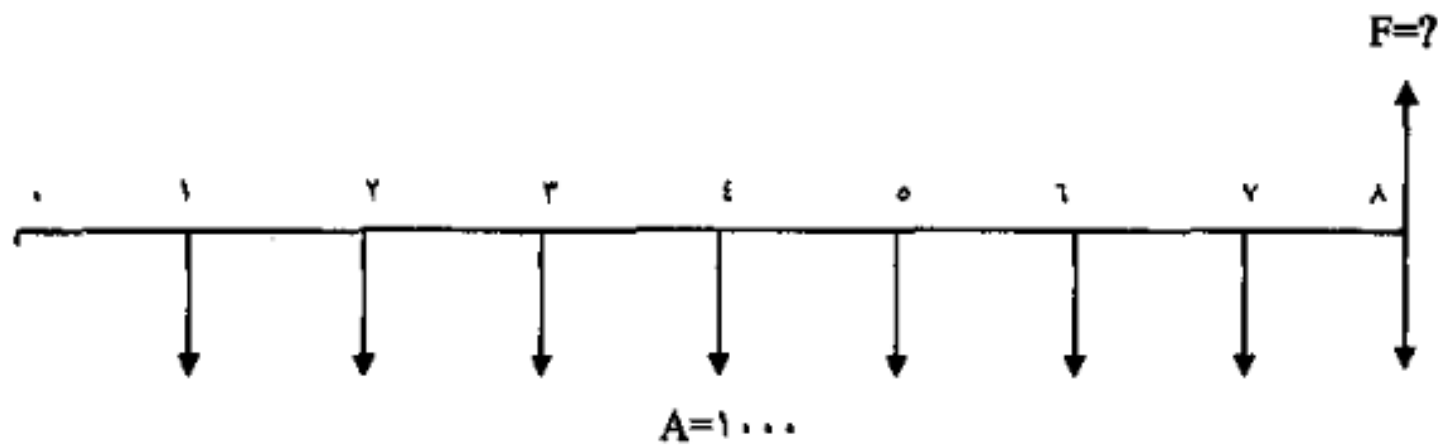
$$X_{۴۲} = 7/7098 + \frac{2}{5} (0.030) = 7/7218$$

و بدین ترتیب بعد از یک درونیابی دو مرحله‌ای یا دو طرفه، به مقدار $(P/A, \%, ۱۳, ۴۲)$ ، برابر با $7/7218$ می‌رسیم. بعد از تشریح جدول فاکتورها و موارد استفاده درونیابی، به بررسی موارد استفاده فاکتورها می‌پردازیم.

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

اولین قدم برای محاسبات اقتصادی یک پروژه، رسم فرآیند مالی پروژه است. فرآیند مالی، خود راهنمای انتخاب فرمول و فاکتور مناسب خواهد بود.

● مثال ۳-۳. چه مقدار پول در حساب بانکی شما خواهد بود، اگر شما از سال آینده، برای ۸ سال، هر سال ۱,۰۰۰ واحد پولی در حساب بانکی خود پس انداز نمایید. نرخ بهره برای پس انداز در بانک ۴٪ فرض می شود. شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:



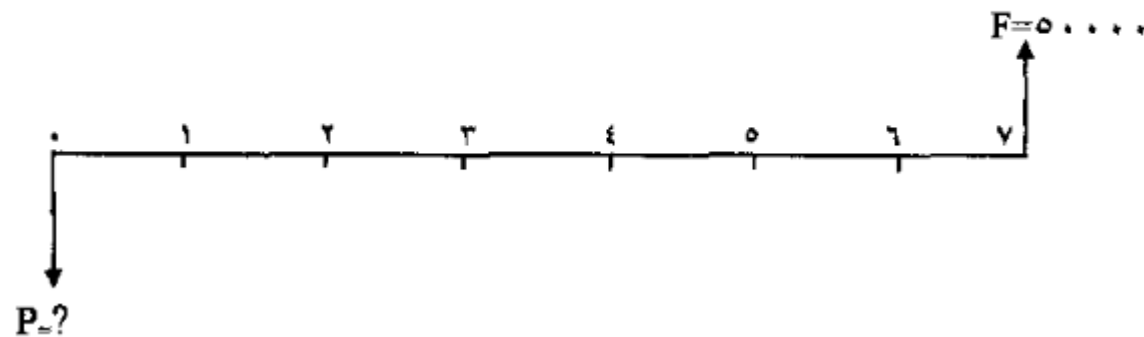
حل: از آنجا که اولین پرداخت در پایان سال اول و آخرین پرداخت در پایان سال هشتم قرار دارد، از فاکتور F/A بصورت زیر استفاده می شود:

$$F = 1,000 (F/A, 4\%, 8) = 1,000 (9/214) = 9,214$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۳-۴. اگر در یک طرح، بعد از ۷ سال به شما ۵۰,۰۰۰ واحد پولی به عنوان اصل و فرع بپردازند، اکنون چه مقدار پول در این طرح سرمایه گذاری می کنید؟ حداقل نرخ جذب کننده ۵٪ در سال فرض می شود.

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:



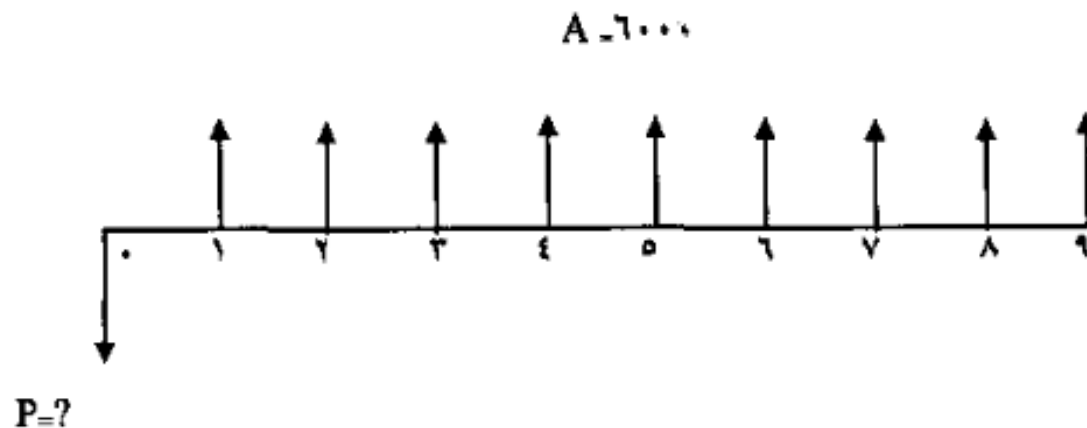
$$P = 50,000 = (P/F, \%, 5, 7)$$

$$P = 50,000 (1/1.05^7) = 35,535$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۳-۵- اگر بانکی متعهد شود از سال آینده در چنین روزی تا مدت ۹ سال، همه ساله مبلغ ۶,۰۰۰ واحد پولی به شما پرداخت نماید و نرخ بانک ۷٪ در سال فرض شود، چه مقدار پول در این طرح سرمایه گذاری می کنید؟

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:

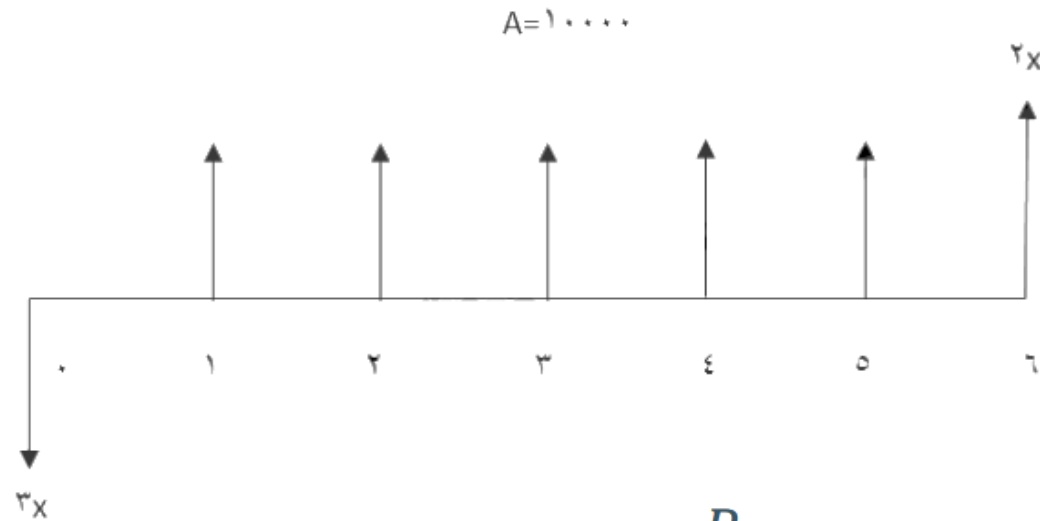


$$P = 6,000 (P/A, 7\%, 9) = 6,000 (6/5152) = 39091/2$$

مقدار X در جریان مالی زیر را بدست آورید. (با فرض نرخ بهره سالیانه ۹٪)

$$(P/A, 9\%, 5) = 3.8896$$

$$(P/F, 9\%, 6) = 0.5963$$



$$p = 1000 \left(\frac{P}{A}, 9\%, 5 \right) + 2x (P/F, 9\%, 6)$$

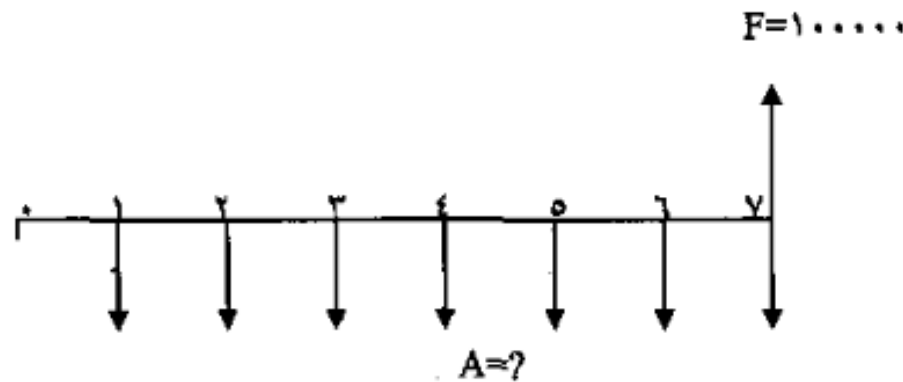
$$3x = 1000 (3/8896) + 2x (0/9174)$$

$$x = 33381/4$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۳-۶. چه مقدار پول باید هر سال (شروع یکسال بعد) در بانک پس انداز کنید تا پس از ۷ سال با نرخ بهره بانک ۵٪، مبلغ ۱۰۰,۰۰۰ واحد پولی در حساب شما باشد:

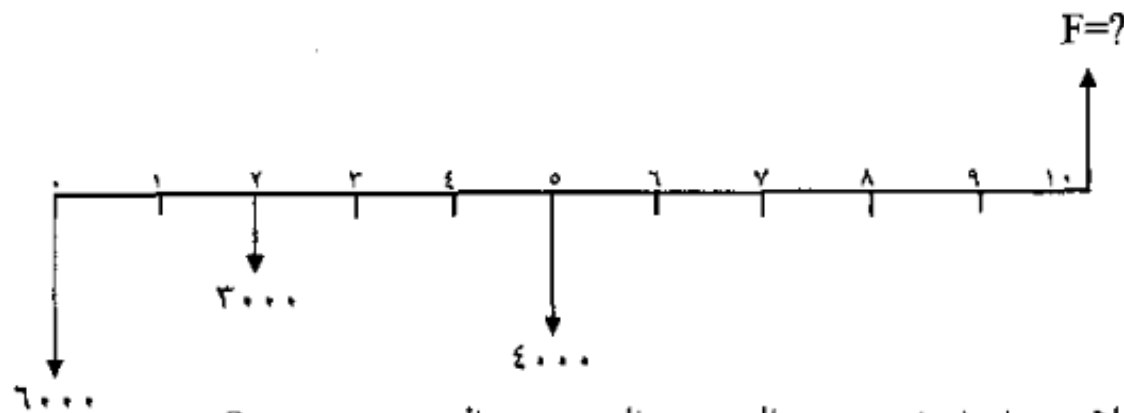
حل: شکل فرآیند مالی به صورت زیر است:



$$A = 100,000 (A/F, 5\%, 7) = 100,000 (0.12282) = 12,282$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۷-۳- اگر شخصی امروز ۶,۰۰۰ واحد پولی، دو سال دیگر در چنین روزی ۳,۰۰۰ واحد پولی و پنج سال دیگر در چنین روزی ۴,۰۰۰ واحد پولی در بانک، با نرخ بهره ۵٪ پس انداز کند، پس از ۱۰ سال از امروز، چه مقدار پول در حساب بانکی او خواهد بود؟
حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:



ارزش فعلی هر یک از اقلام پس انداز شده در حال، دو سال و پنج سال بعد بصورت P ، به F تبدیل خواهد شد:

$$F = 6,000 (F/P, \%, 10) + 3,000 (F/P, \%, 8) + 4,000 (F/P, \%, 5)$$

$$F = 6,000 (1/6289) + 3,000 (1/4775) + 4,000 (1/2763)$$

$$F = 19311/1$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۷-۳- اگر شخصی امروز ۶,۰۰۰ واحد پولی، دو سال دیگر در چنین روزی ۳,۰۰۰ واحد پولی و پنج سال دیگر در چنین روزی ۴,۰۰۰ واحد پولی در بانک، با نرخ بهره ۵٪ پس انداز کند، پس از ۱۰ سال از امروز، چه مقدار پول در حساب بانکی او خواهد بود؟

مسئله فوق را می توانستیم از طریق دیگری حل نمائیم. ابتدا ارزش فعلی اقسام پس انداز شده را در سال مبدا (سال صفر) محاسبه می کنیم و سپس کل ارزش فعلی را برای تعیین ارزش آینده به سال دهم انتقال می دهیم:

$$P = 6,000 + 3,000 (P/F, \%, 5, 2) + 4,000 (P/F, \%, 5, 5)$$

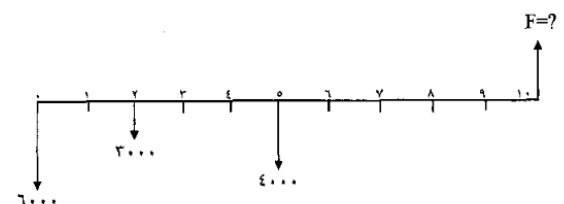
$$P = 6,000 + 3,000 (0/9070) + 4,000 (0/7835)$$

$$P = 11,855$$

$$F = 11,855 (F/P, \%, 5, 10) = 11,855 (1/6289)$$

$$F = 19,310/6$$

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:



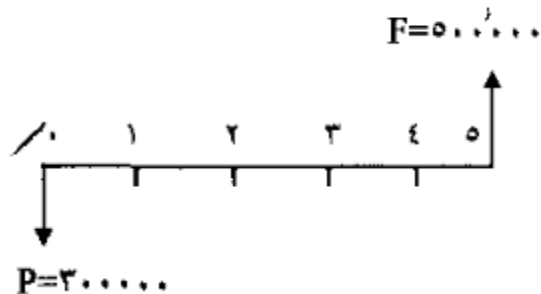
تفاوت جزئی در جوابها، بخاطر استفاده از فاکتورهای متفاوت و تقریب جزئی در فاکتورهاست. منظور از تقریب در فاکتورها، رقم های اعشاری است که اغلب تا سه رقم اعشار وجود دارد.

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۳-۸- شرکت «گل بار» قصد دارد در یک پروژه تولیدی سرمایه گذاری نماید. نحوه سرمایه گذاری بدین ترتیب است که شرکت در حال حاضر ۳۰۰,۰۰۰ واحد پولی می پردازد و بعد از ۵ سال مبلغ ۵۰۰,۰۰۰ واحد پولی دریافت می کند. اولاً نرخ بازگشت سرمایه برای شرکت چقدر خواهد بود؟ ثانیاً: اگر بانکی حاضر شود نرخ بهره ۷٪ را به عنوان نرخ بازگشت سرمایه به شرکت بپردازد، بشرطی که شرکت به همان نحو سرمایه گذاری را در بانک انجام دهد، آیا بهتر نیست شرکت در بانک سرمایه گذاری نماید؟

حل: شکل فرآیند مالی به صورت زیر است:

نرخ بازگشت سرمایه به صورت زیر محاسبه می شود:



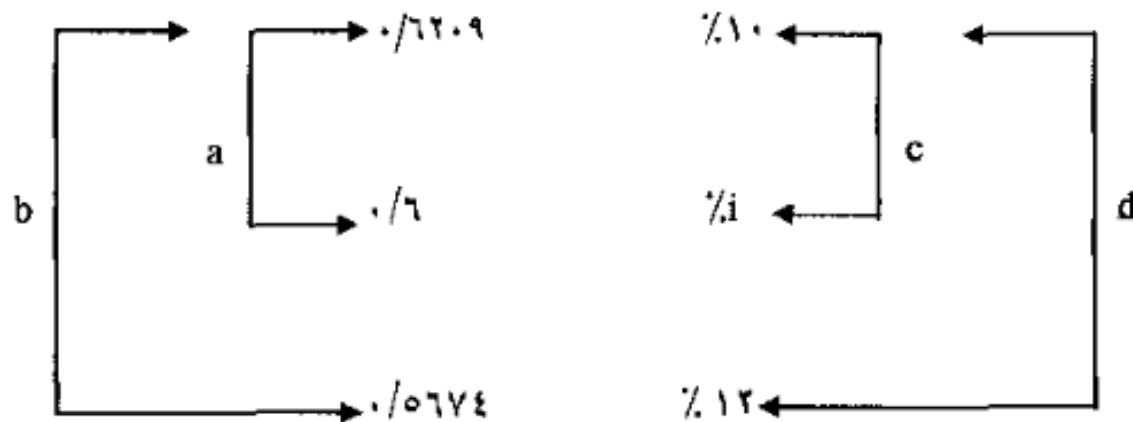
$$P = F (P/F, i\%, n)$$

$$300,000 = 500,000 (P/F, i\%, 5)$$

$$(P/F, i\%, 5) = \frac{300,000}{500,000} = 0.6$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

با استفاده از جدول فاکتورها باید مقدار (i) را تعیین کرد. بدین ترتیب که باید در ستون P/F در سال پنجم، در جستجوی نرخ بود که P/F آن $0/6$ است. عدد $0/6$ را نمی توان در ستون P/F مشاهده کرد ولی اعداد بالا و پائین $0/6$ در نرخهای 10% ، 12% وجود دارند. سپس تناسب زیر باید تشکیل گردد:



$$C = \left(\frac{0/6209 - 0/6}{0/6209 - 0/5674} \right) (12 - 10) = 0/7813$$

$$i = 10 + 0/78 = 10/78\%$$



که معمولاً عبارت بالا به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$ROR = 10/78\%$$



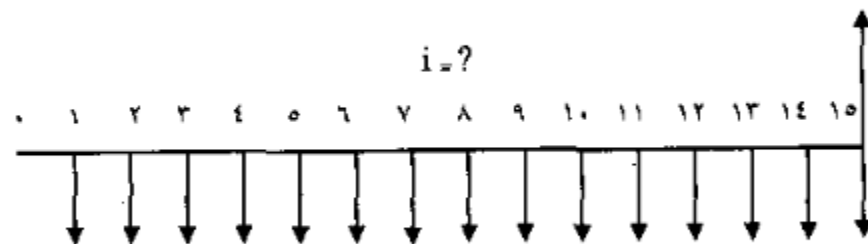
برای پاسخ به قسمت دوم سوال، از آنجا که نرخ بازگشت سرمایه $10/78\%$ از 7% نرخ بانک بیشتر است، برای شرکت، سرمایه گذاری در واحد تولیدی اقتصادی تر است تا پس انداز نمودن در بانک.

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۹-۳. حداقل نرخ جذب کننده شرکت «گلنار» ۵٪ در سال است. پیشنهادی بدین قرار به شرکت شده است: از یکسال بعد، هفت ساله تا ۱۵ سال مبلغ ۵۰,۰۰۰ واحد پولی در طرحی سرمایه گذاری شود و در پایان ۱۵ سال مبلغ ۱,۰۰۰,۰۰۰ واحد پولی دریافت شود. تصمیم شرکت چیست؟

حل: ابتدا نرخ برگشت سرمایه با توجه به شکل فرایندهای طرح محاسبه می شود:

$$F = 1,000,000$$



$$A = 50,000$$

$$A = F (A/F, i\%, n)$$

$$50,000 = 1,000,000 (A/F, i\%, 15)$$

$$(A/F, i\%, 15) = 0.05$$

با استفاده از جدول و روش درونیابی، نرخ بازگشت سرمایه عبارت است از:

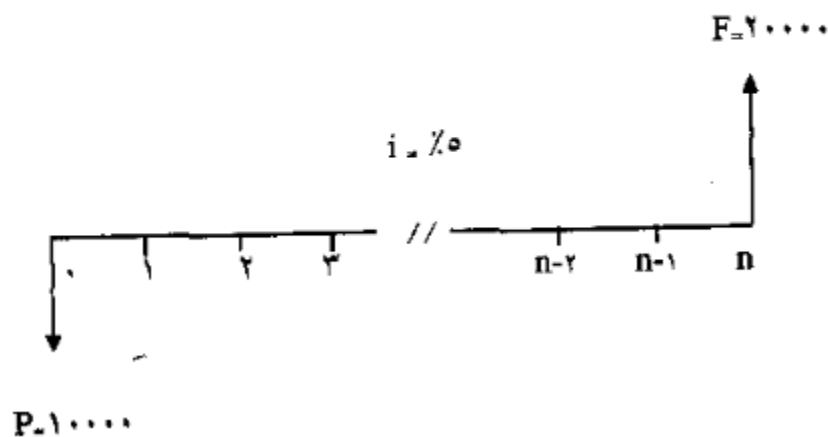
$$ROR = 3.98\%$$

از آنجا که حداقل نرخ جذب کننده شرکت ۵٪ در سال است، بنابراین این پیشنهاد اقتصادی نمی باشد.

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

- مثال ۱۰-۳. چه مدت طول می کشد تا ۱۰,۰۰۰ واحد پولی به ۲۰,۰۰۰ واحد پولی تبدیل شود، اگر نرخ بانک ۵٪ در سال فرض شود.

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:



$$P = F (P/F, i\%, n)$$

$$10,000 = 20,000 (P/F, 5\%, n)$$

$$(P/F, 5\%, n) = 0.5$$

در جدول فاکتورها، در صفحه نرخ ۵٪ و در ستون P/F مشاهده می شود که ۰/۵، بین سالهای ۱۴ و ۱۵ واقع است.

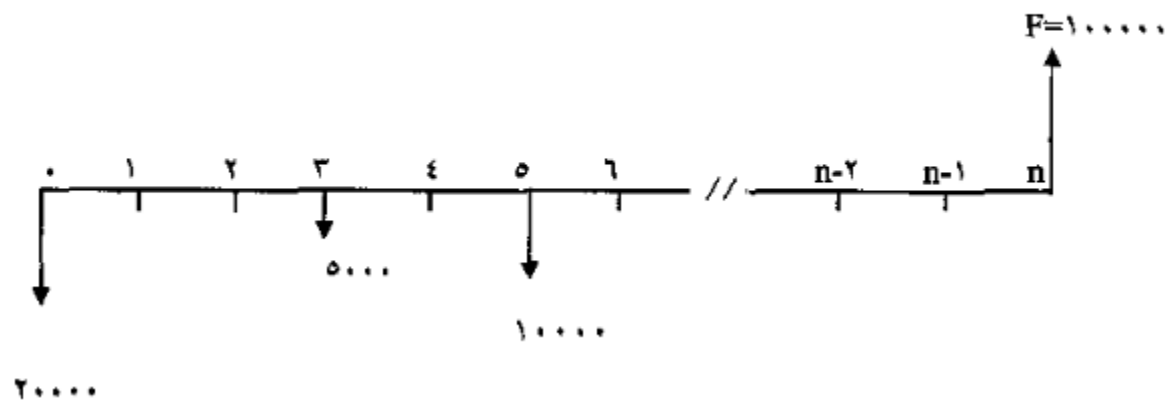
$$n = 14/2$$

با استفاده از روش درونیابی:

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

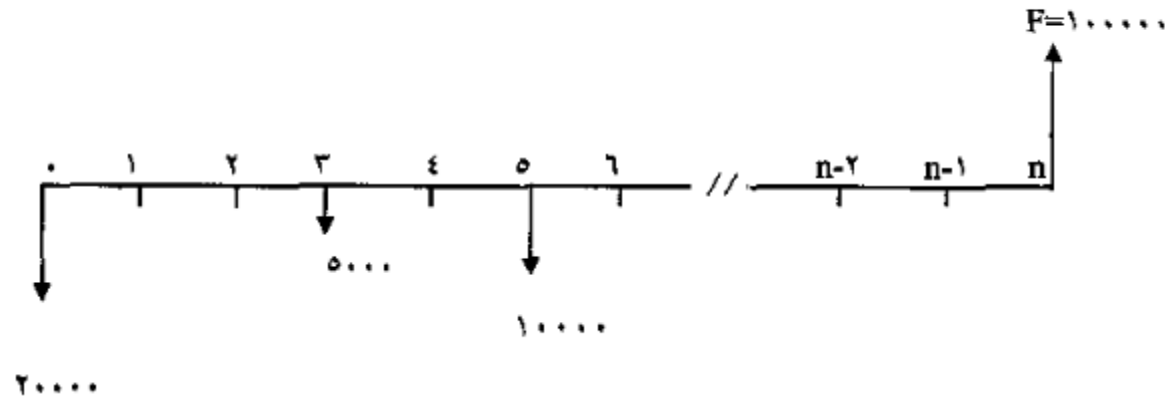
● مثال ۱۱-۳. یک سرمایه گذار، مبلغ ۲۰,۰۰۰ واحد پولی اکنون، ۵,۰۰۰ واحد پولی سه سال دیگر از حال، ۱۰,۰۰۰ واحد پولی پنج سال دیگر از حال در یک طرح سرمایه گذاری می کند. از حالا چند سال طول می کشد تا اصل و فرع سرمایه گذاری های انجام شده توسط او به ۱۰۰,۰۰۰ واحد پولی برسد؟ نرخ بازگشت سرمایه در طرح ۶٪ پیش بینی شده است.

حل: شکل فرآیند مالی این طرح بصورت زیر است:



یکی از راههای ساده حل این مسئله بدین ترتیب است که ارزش فعلی ۵,۰۰۰ در سال سوم و ۱۰,۰۰۰ در سال پنجم را در سال مبداء (سال صفر) تعیین و با ۲۰,۰۰۰ در سال صفر جمع نمود تا ارزش فعلی کل بدست آید. این ارزش فعلی در مدت n سال باید برابر ۱۰۰,۰۰۰ شود:

حل: شکل فرآیند مالی این طرح بصورت زیر است:



$$P = 20,000 + 5,000 (P/F, 6\%, 3) + 10,000 (P/F, 6\%, 5)$$

$$P = 20,000 + 5,000 (0.8396) + 10,000 (0.7473)$$

$$P = 31,671$$

$$P = F (P/F, i\%, n)$$

$$31,671 = 100,000 (P/F, 6\%, n)$$

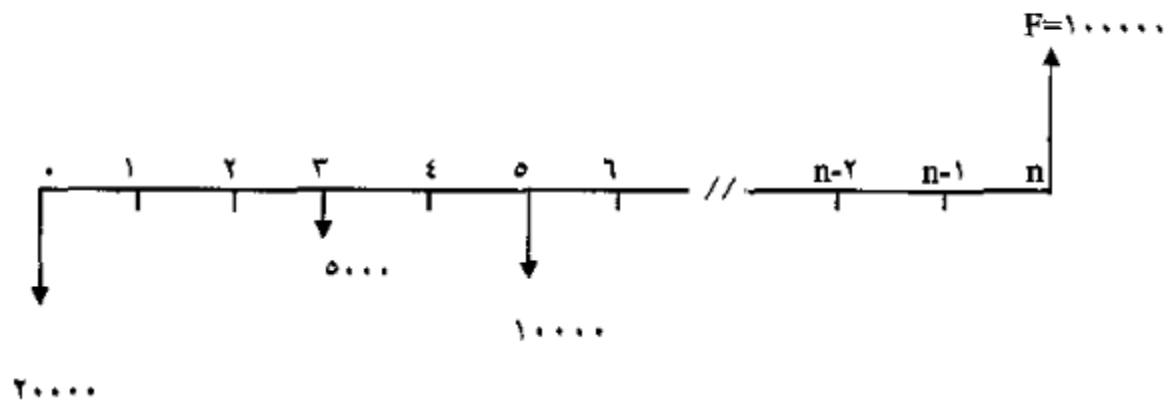
$$(P/F, 6\%, n) = 0.31671$$

عدد فوق در صفحه نرخ ۶٪، در ستون $\frac{P}{F}$ بین سالهای ۱۹ و ۲۰ واقع است که باروش

درون‌یابی داریم:

$$n = 19/73$$

حل: شکل فرآیند مالی این طرح بصورت زیر است:



راه دیگر حل این مسئله بدین ترتیب است که ارزش آینده هر یک از اقلام سرمایه گذاری در حال، سال دوم و سال پنجم به طریق زیر پیدا شود. مقادیر P_1 ، P_2 و P_3 مقادیر سه بار سرمایه گذاری هستند:

$$F = P_1 (F/P, i\%, n) + P_2 (F/P, i\%, n-3) + P_3 (F/P, i\%, n-5)$$

$$F = 20,000 (F/P, 7.6\%, n) + 5,000 (F/P, 7.6\%, n-3) + 10,000 (F/P, 7.6\%, n-5)$$

از آنجا که عبارت طرف راست، باید برابر با مقدار ۱۰۰,۰۰۰ شود، باید n های مختلف در عبارت فوق قرار گیرند تا شرایط برای درونیابی فراهم گردد:

$$n = 19 \quad F = 95,830$$

$$n = 20 \quad F = 101,575$$

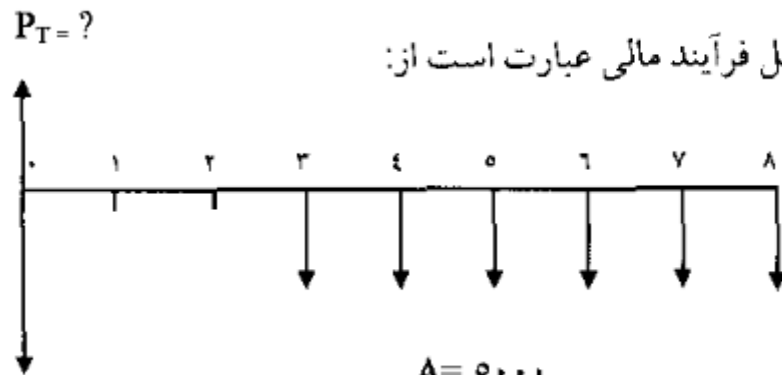
محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۱۲-۳- شرکت «گلکار» یک ماشین کشاورزی را خریداری می‌کند. ۵۰,۰۰۰

واحد پولی را نقد می‌پردازد و قرار است از سه سال بعد، به مدت شش سال همه ساله

۵,۰۰۰ واحد پولی بپردازد. اگر حداقل نرخ جذب کننده شرکت ۸٪ در سال فرض شود،

ارزش فعلی ماشین کشاورزی چقدر است؟ حل: شکل فرآیند مالی عبارت است از:



در شکل فوق، P_T ارزش فعلی کل^۱ را نشان می‌دهد که عبارت است از مجموع:

$$A = 5,000$$

$$P_T = P_1 + P_2$$

که P_2 ارزش فعلی پرداختهای مساوی از سال سوم تا سال هشتم است. اما برای محاسبه P_2 ، مبدأ در سال دوم فرض می‌شود و سپس ارزش فعلی از سال دوم به سال مبدأ واقعی یعنی سال صفر انتقال می‌یابد:

$$P_T = 50,000 + 5,000 (P/A, 8\%, 6) (P/F, 8\%, 2)$$

$$P_T = 50,000 + 5,000 (4/6229) (0/8573)$$

$$P_T = 69,816$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۱۳-۳- شرکت «گلریز» ماشینی را خریداری نموده است و قرار است از سال سوم تا سال هشتم (برطبق فرایند مالی زیر)، پرداختهای مساوی معادل با ۸,۰۰۰ بپردازد. شرکت علاقمند است بداند که اگر نرخ بهره ۶٪ در سال فرض شود، پرداختهای مساوی و یکنواخت از سال اول تا سال هشتم چقدر است؟



$$A = 8,000$$

حل: برای بدست آوردن پرداخت مساوی از سال اول تا سال هشتم (A) می توان از دو طریق عمل کرد:

طریق اول بدین ترتیب است که ارزش فعلی شش پرداخت، طبق شکل فوق در سال مبدا یعنی سال صفر بدست آید:

$$P = 8,000 (P/A, 6\%, 6) (P/F, 6\%, 2)$$

$$P_T = 35,011/2$$

و سپس A از P محاسبه گردد:

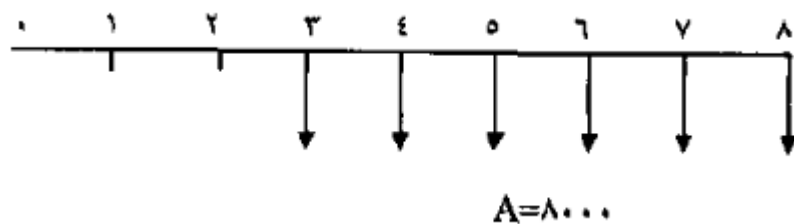
$$A = P (A/P, 6\%, 8)$$

$$A = 35,011/2 (0/16221)$$

$$A = 5,638/2$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

- مثال ۱۳-۳. شرکت «گلریز» ماشینی را خریداری نموده است و قرار است از سال سوم تا سال هشتم (برطبق فرایند مالی زیر)، پرداختهای مساوی معادل با ۸,۰۰۰ بپردازد. شرکت علاقمند است بداند که اگر نرخ بهره ۶٪ در سال فرض شود، پرداختهای مساوی و یکنواخت از سال اول تا سال هشتم چقدر است؟



طریق دوم بدین ترتیب است که ابتدا ارزش آینده شش بار پرداخت مساوی، یعنی F محاسبه و سپس A را از F بدست آوریم:

$$F = 8,000 (F/A, 6\%, 6)$$

$$F = 55,800$$

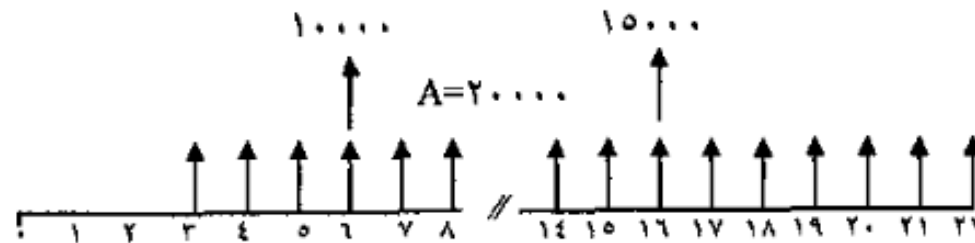
$$A = F (A/F, 6\%, 8)$$

$$A = 55,800 (0/1.0104)$$

$$A = 5,638$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۱۴-۳. ارزش فعلی فرآیند مالی زیر را محاسبه کنید. نرخ بهره سالیانه ۶٪ فرض شده است.



حل: متذکر می شود که مقدار $A = 20,000$ از سال سوم تا سال بیست و دوم تکرار شده است. در سالهای ششم و شانزدهم نیز درآمد ۱۵,۰۰۰ و ۱۰,۰۰۰ وجود دارد. کلیه درآمدهای مساوی از سال سوم تا بیست و دوم ابتدا از طریق P/A به سال مبدا خود و سپس به مبدا واقعی یعنی سال صفر انتقال می یابد. ارزش فعلی کل (P_T) عبارت خواهد بود از:

$$P_T = 20,000 (P/A, 6\%, 20) (P/F, 6\%, 2) + 10,000 (P/F, 6\%, 6) + 15,000 (P/F, 6\%, 16)$$

$$P_T = 217,118$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۱۵-۳ مقدار درآمد مساوی یکنواخت را در فرآیند مالی مثال ۱۴-۳ محاسبه کنید.

حل: درآمد مساوی یکنواخت را از دو طریق می توان بدست آورد:

الف: از طریق ارزش فعلی $A = P_T (A/P, \%, ۲۲)$

در مثال قبل P_T محاسبه شد. در این صورت تعیین A یا مقدار درآمد مساوی یکنواخت به سادگی عملی است:

$$A = ۲۱۷,۱۱۸ (۰/۰۸۳۰۵)$$

$$A = ۱۸,۰۳۲$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۱۵-۳ مقدار درآمد مساوی یکنواخت را در فرآیند مالی مثال ۱۴-۳ محاسبه کنید.

ب: از طریق ارزش آینده

باید ابتدا مقدار ارزش آینده کل (F_T) محاسبه و سپس با استفاده از از فاکتور A/F ، A تعیین شود.

$$F_T = 20,000 (F/A, \%, 6, 20) + 10,000 (F/P, \%, 6, 16) + 15,000 (F/P, \%, 6, 6)$$

$$F_T = 782,381$$

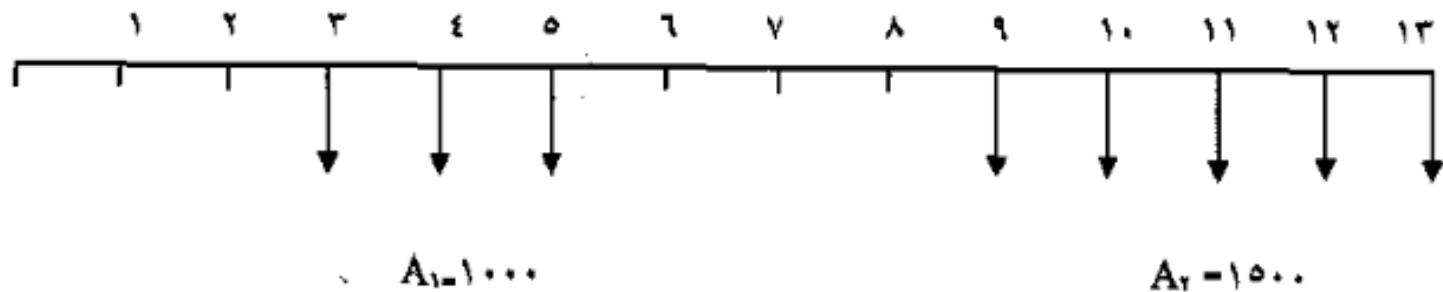
$$A = F_T (A/F, \%, 6, 22)$$

$$A = 782,381 (0.02305)$$

$$A = 18,034$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۱۶-۳ ارزش فعلی را در فرآیند مالی زیر محاسبه کنید، اگر نرخ ۱۵٪ در سال فرض شود:



حل: محاسبه ارزش فعلی شکل فوق می تواند از طرق مختلف انجام شود که به توضیح دو طریق زیر می پردازیم:
الف: از طریق ارزش فعلی

$$P_T = P_{A1} + P_{A2}$$

$$P_{A1} = A_1 (P/A, \%, 15, 3) (P/F, \%, 15, 2)$$

$$P_{A1} = 1,000 (2/283) (0/756)$$

$$P_{A1} = 1,726$$

$$P_{A2} = A_2 (P/A, \%, 15, 5) (P/F, \%, 15, 8)$$

$$P_{A2} = 1,500 (3/252) (0/327)$$

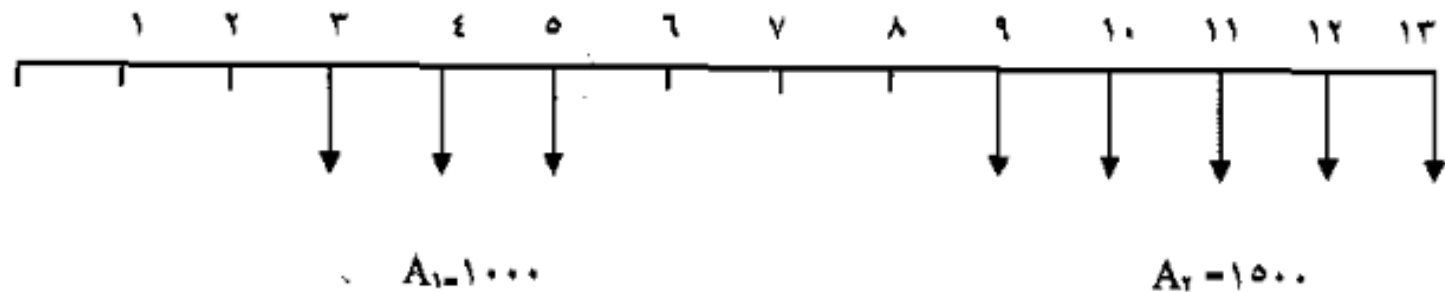
$$P_{A2} = 1,644$$



$$P_T = 3,370$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

● مثال ۱۶-۳ ارزش فعلی را در فرآیند مالی زیر محاسبه کنید، اگر نرخ ۱۵٪ در سال فرض شود:



ب: از طریق ارزش آینده

$$P_T = (F_{A1} + F_{A2}) (P/F, 15\%, 13)$$

$$F_{A1} = 1,000 (F/A, 15\%, 3) (F/P, 15\%, 8)$$

$$F_{A1} = 10,621$$

$$F_{A2} = 1,500 (F/A, 15\%, 5)$$

$$F_{A2} = 10,113$$

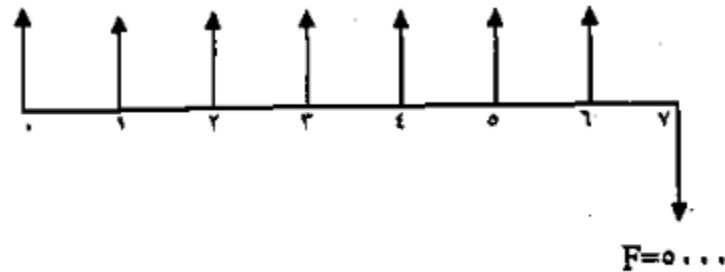
$$P_T = (10,621 + 10,113) (P/F, 15\%, 13)$$

$$P_T = 3,370$$

محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

- مثال ۳-۱۷- فرآیند مالی شرکت «گلنار» بصورت زیر می باشد. ارزش فعلی شکل را اگر حداقل نرخ بهره جذب کننده سالانه ۸٪ فرض شود محاسبه نمایید.

$$A=460$$



حل:

$$P_T = 460 + 460 (P/A, 8\%, 6) - 5000 (P/F, 8\%, 7)$$

$$P_T = -331$$

توضیح اینکه ارزش فعلی ۴۶۰ در سال صفر، برابر با خودش بوده و از آنجا که فرآیند مالی سال هفتم هزینه می باشد، با علامت منفی نشان داده شده است.

مسائل فصل سوم

در مسائل ۱-۳ تا ۳-۳ مقدار فاکتورهای خواسته شده را از طریق درونیابی خطی محاسبه نمایید:

a. $(P/A, \%, ۸/۵, ۱۳)$

● ۱-۳-

b. $(F/A, \%, ۳۷, ۲۴)$

c. $(P/F, \%, ۷/۷, ۹)$

d. $(A/F, \%, ۴۹, ۲۸)$

a. $(F/P, \%, ۳, ۳۹)$

● ۲-۳-

b. $(A/P, \%, ۱۰, ۹/۸)$

c. $(A/F, \%, ۶, ۵۲)$

d. $(P/F, \%, ۱۸, ۳۷)$

مسائل فصل سوم

● ۳-۳-

- a. $(P/F, \%, 3/8, 7/7)$
- b. $(P/A, \%, 9/6, 68)$
- c. $(F/A, \%, 23, 11/6)$
- d. $(A/F, \%, 17, 23)$

● ۳-۴- اگر شما مبلغ ۵,۰۰۰ واحد پولی را در بانکی با نرخ ۱۸٪ در سال، به مدت ۱۲ سال پس انداز نمائید، اصل و فرع پس از مدت مذکور چقدر خواهد بود؟

● ۳-۵- شخصی مبلغ ۴۵,۰۰۰ واحد پولی را با نرخ ۲۰٪ در سال قرض می کند و یکسال پس از قرض گرفتن، شروع به پرداخت اقساط سالانه خواهد نمود. اگر شخص بخواهد مبلغ مذکور را در ۵ قسط مساوی سالیانه بپردازد، قسط سالیانه را تعیین نمائید.

مسائل فصل سوم

● ۳-۶- اگر شخصی ۸,۰۰۰ واحد پولی اکنون و ۱۶,۰۰۰ واحد پولی سه سال دیگر در چنین روزی در بانک پس انداز نماید، چند سال طول می کشد تا اصل و فرعی برابر با ۳۵,۰۰۰ واحد پولی از بانک دریافت نماید. نرخ بهره بانک ۱۰٪ در سال است.

● ۳-۷- شرکت «گلجو» طرحی برای بازنشستگی کارمندان خود دارد. کارمندان به مدت ۲۵ سال، هر سال ۷,۲۰۰ واحد پولی، حق بازنشستگی می پردازند و این پرداخت از پایان سال اول آغاز می شود. شرکت تضمین می نماید که در پایان دوره ۲۵ سال، مبلغ ۲۵۰,۰۰۰ واحد پولی به کارمندان بطور یکجا بپردازد. نرخ بازگشت سرمایه روی این طرح بازنشستگی چقدر است؟

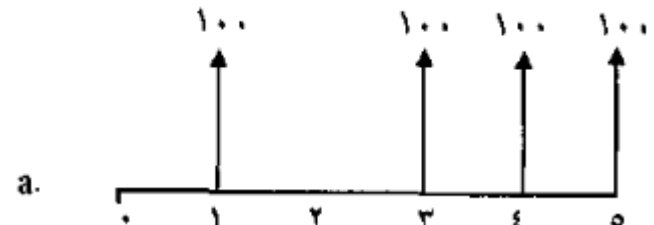
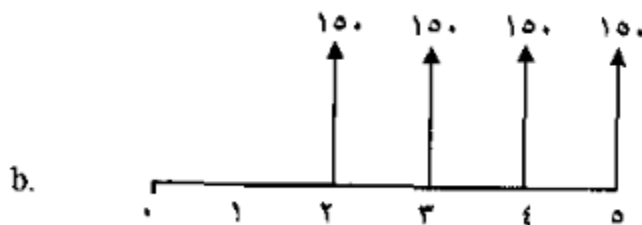
مسائل فصل سوم

- ۳-۸ مقدار ارزش فعلی را در فرآیند مالی زیر محاسبه کنید. نرخ بهره ۱۵٪ در سال می باشد.

$$A=1000$$

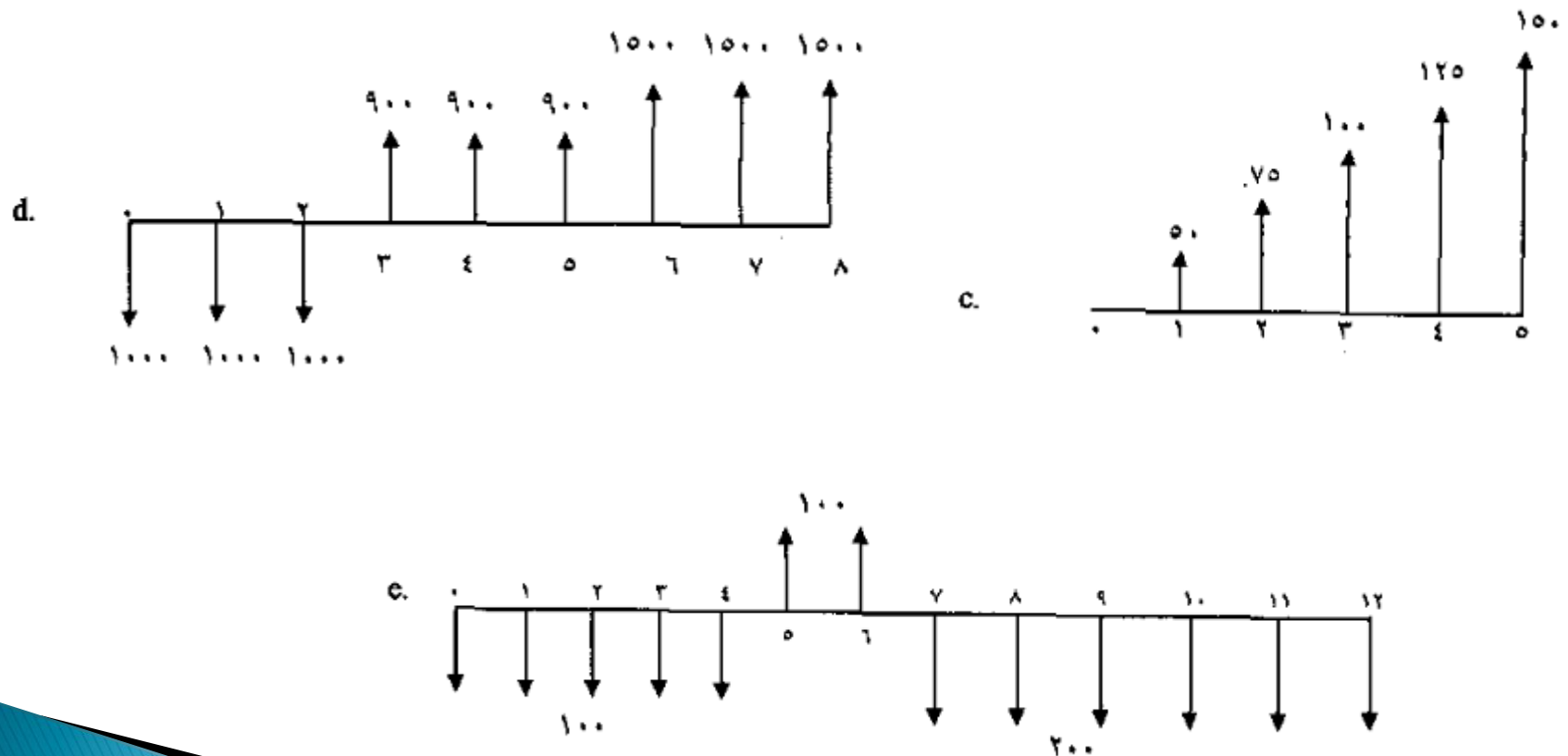


- ۳-۹ مقدار ارزش فعلی را در فرآیندهای مالی زیر با نرخ بهره سالانه ۱۵٪ در دوره محاسبه نمایید:



مسائل فصل سوم

● ۹-۳. مقدار ارزش فعلی را در فرآورده‌های مالی زیر با نرخ بهره سالیانه ۱۵٪ در دوره محاسبه نمایید:

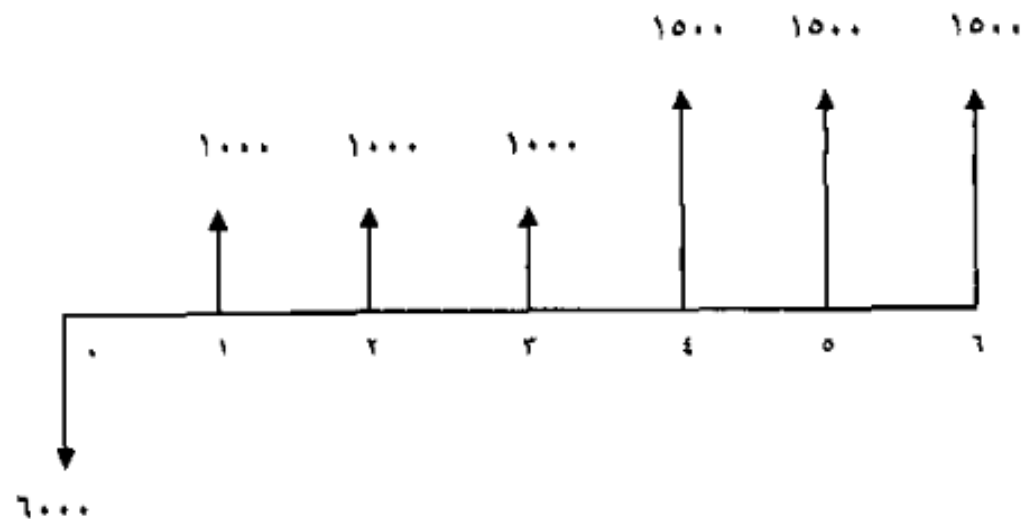


مسائل فصل سوم

- ۳-۱۰ مقدار دریافت یکنواخت سالیانه را در مسئله شماره ۳-۸ معین نمایید.
- ۳-۱۱ مقدار دریافت یکنواخت سالیانه را در مسئله شماره ۳-۹ قسمتهای a و b و c نمایید.
- ۳-۱۲ در مسئله ۳-۹ قسمت c، هزینه یکنواخت سالیانه (هزینه سالیانه از سال ۱ تا ۱۲) را بدون در نظر گرفتن درآمدهای سال پنجم و ششم محاسبه نمایید.

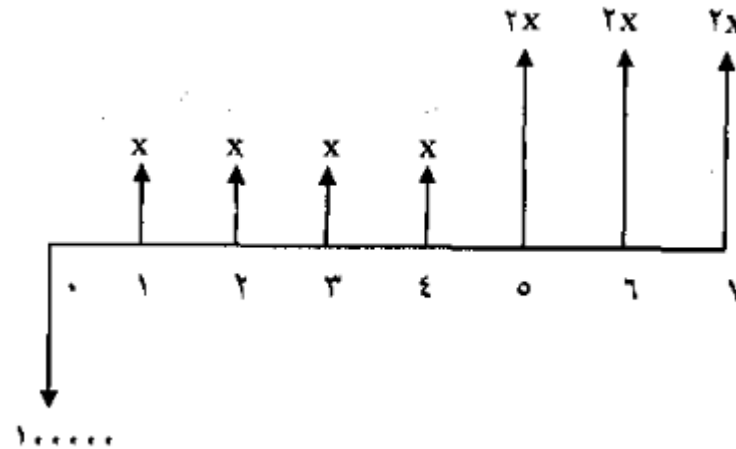
مسائل فصل سوم

- ۱۳-۳. پروژه‌ای با فرآیند مالی زیر به شرکت «گلپر» پیشنهاد شده است. حداقل نرخ جذب کننده شرکت برابر ۸٪ در سال است. آیا اجرای این پروژه را به شرکت توصیه می‌نمائید.



مسائل فصل سوم

- ۳-۱۴. در فرآیند مالی زیر مقدار X را تعیین کنید. نرخ بهره سالیانه ۲۰٪ است.



- ۳-۱۵. در فرآیند مالی زیر مقدار X را محاسبه نمایید. نرخ بهره سالیانه ۱۵٪ است.

