به نام خدا

محاسبات عددی

تألیف:

دکتر مسعود نیکوکار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

دکتر محمد تقی درویشی

دانشگاه رازی

سرشناسه	: نیکوکار، مسعود ۱۳۳۲ -
عنوان و نام پدیدآور	: محاسبات عددی / تألیف مسعود نیکوکار، محمدتقی درویشی.
وضعیت ویراست	: (ویراست ٤)
مشخصات نشر	: تهران، گسترش علوم پایه، ۱۳۸٤.
مشخصات ظاهری	: (٦) ۳۲۲ ص. مصور، جدول، نمودار.
فروست	: گسترش علوم؛ ۱۰۲.
شابک	: ۱۲۰۰۰۰ ریال، ۸-۰٤۸-٤۹۰-۹٦٤-۹۷۸.
یادداشت	: پشت جلد به انگلیسی: M.Nikoukar - Numerical Computation
یادداشت	: چاپ هفدهم ۱۳۸۸.
یادداشت	: نمایه.
موضوع	: محاسبات عددی.
شناسه افزوده	: درویشی، محمدتقی، ۱۳٤٤ -
رده بندی کنگره	: ۱۳۸٤ / ۲م۹ن / ۲۹۷
رده بندی دیویی	: ۵۱۹/٤
شماره کتابشناسی ملی	: ۸٤۰۱٦۵۳۱ م

نام کتاب: .... محاسبات عددی
مؤلفین: .... دکتر مسعود نیکوکار – دکتر محمدتقی درویشی
ناشر: .... انتشارات گسترش علوم پایه
مدیر فنی: .... مهدی زنگنه
حروفچینی: .... ابویی
طراحی جلد: .... حاتمی کیا
لیتوگرافی .... مهرشاد
چاپخانه: .... مهر
سال نشر: ۱۳۹۲
نوبت چاپ: .... بیست و پنجم
شمارگان: .... ۳۰۰۰ جلد
قیمت کتاب: .... ۱۴۰۰۰۰ ریال
شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۴۹۰-۰۴۸-۸ ISBN: 978-964-490-048-8

دفتر انتشارات و پخش شهرستان: میدان انقلاب، ابتدای کارگر جنوبی، کوچه مهدیزاده، پلاک ۹، طبقه همکف
تلفن: ۱۵ ~ ۶۶۹۰۵۳۱۲ تلفکس: ۰۲۱-۶۶۹۰۵۳۱۶
Email:gostaresh_op@yahoo.com
www.gostaresh-pub.com
دفتر سفارشات تهران: خ آزادی، خ جمال‌زاده جنوبی، خ دیلمان، پلاک ۱۴ واحد ۲
تهران: ۱۴ ~ ۶۶۵۹۵۵۱۲
فروشگاه فجر تهران: خ انقلاب، بین فروردین و اردیبهشت، پ ۱۴۶۲ – ۶۶۴۰۴۹۸۳ (۰۲۱)

مقدمه

محاسبات عددی یکی از جالب‌ترین و پرمحتواترین دروس است که در دوره کارشناسی ارائه می‌شود. به عنوان مثال با مطالعه این درس، قادر به حل معادلاتی می‌شویم که به طریق کلاسیک قادر به حل آنها نبودیم و یا مقادیر انتگرال‌هایی را محاسبه می‌کنیم که به روش‌های کلاسیک قادر به تعیین مقادیر آنها نیستیم و ...

کتاب حاضر براساس مصوبه شورایعالی برنامه‌ریزی ستاد انقلاب فرهنگی برای دانشجویان رشته‌های فنی مهندسی تدوین شده که حاصل تجربیاتی است که طی سالها تدریس کسب نموده‌ایم.

در این کتاب سعی بر آن بوده تا مطالب به زبان ساده بیان شوند تا فهم آن، آسان باشد. با ارائه مثالهای متنوع که برای هر موضوع در نظر گرفته‌ایم، درک موضوع آسان و کاربرد آن نیز مشخص گردیده است.

سعی در ارائه بیان روان و ساده مطالب، ممکن است باعث لغزش‌هایی در مفاهیم گردد که از نظر دور مانده باشند. تذکرات و راهنمایی‌های سازنده استادان و دانشجویان عزیز، موجب سپاسگزاری صمیمانه مؤلفین در تصحیح و تکمیل کتاب در چاپ‌های بعدی خواهد بود. مطالب این کتاب برای تدریس یک نیمسال تحصیلی تنظیم شده است. ضمناً وظیفه خود می‌دانیم که از زحمات آقای خسرو سایه‌وند که در ویراستاری کتاب نهایت همکاری را داشته است تشکر کنیم.

دکتر مسعود نیکوکار
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر محمدتقی درویشی
دانشگاه رازی

پیشگفتار چاپ ششم

حمد و سپاس خداوند راکه به انسان توانایی اندیشیدن عطا فرمود و فکر و اندیشه را وجه تمایز انسان با سایر مخلوقات قرار داد. اما بعد ...

محاسبات عددی علم و هنر محاسبه است. بسیاری از رشته‌های علوم پایه و فنی و مهندسی نیازمند به دست‌آوردن نتایجی هستند که از روشهای تحلیلی قابل حصول نیستند و یا تعیین آنها بسیار وقت‌گیر می‌باشد. با توجه به ضرورتی که در زمینه یک کتاب جامع محاسبات عددی برای استفاده دانشجویان گرامی احساس می‌شد و با توجه به سابقه تدریس این درس در دانشگاههای مختلف کشور در سال ۱۳۷۹ چاپ اول کتاب بر طبق سرفصل شورایعالی انقلاب فرهنگی به بازار عرضه شد و در اختیار علاقمندان قرار گرفت. خودآموز بودن، روانی مطالب و فراوانی مثالهای کتاب اقبال دانشجویان عزیز را به همراه داشت. در چاپ دوم کتاب با توجه به توصیه‌هایی که دانشجویان و مدرسین گرامی نمودند، مطالب جدید و تمرینهای تکمیلی به کتاب اضافه گردید. در چاپ چهارم ضمیمه برنامه‌های کامپیوتری با استفاده از نرم‌افزار C^{++} به کتاب اضافه شد. به ویرایش فعلی کتاب یک پیوست کامل از مسائل چهارگزینه‌ای اضافه گردیده است در این پیوست حدود دویست مسأله چهارگزینه‌ای از آزمونهای سالهای متفاوت کنکور سراسری و دانشگاه آزاد با حل تشریحی ارائه شده است.

در پایان خود را همچنان نیازمند راهنمایی‌ها، پیشنهاد و انتقادهای سازنده تمامی عزیزان می‌دانیم که امید است ما را از این فیض دریغ نفرمایند.

والسلام

دکتر مسعود نیکوکار **دکتر محمدتقی درویشی**

محاسبات عددی

کد درس: ۰۷

تعداد واحد: ۲

نوع واحد: نظری

پیشنیاز: برنامه‌نویسی کامپیوتر

سرفصل دروس: (۳۴ ساعت)

خطاها و اشتباهات، درون‌یابی و برون‌یابی، یافتن ریشه‌های معادلات با روشهای مختلف، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی، تفاوتهای محدود، روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ۱ و ۲، عملیات روی ماتریس‌ها و تعیین مقادیر ویژه آنها، حل دستگاههای معادلات خطی و غیرخطی، روش حداقل مربعات.

فهرست مطالب

عنوان		صفحه
فصل اول	خطاها	۱
۱.۱	مقدمه	۱
۲.۱	خطای مطلق و نسبی	۲
۳.۱	منابع اصلی خطا	۵
۴.۱	خطای چهار عمل اصلی	۷
۵.۱	خطای محاسبه فرمولها و توابع	۱۱
فصل دوم	حل عددی معادلات $f(x) = 0$	۱۹
۱.۲	مقدمه	۱۹
۲.۲	تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر	۲۰
۳.۲	روش‌های عددی حل معادله $f(x) = 0$	۲۲
۱.۳.۲	روش دوبخشی یا روش تنصیف	۲۲
۲.۳.۲	روش نابجایی	۲۷
۳.۳.۲	روش نیوتن – رفسون	۳۱
۴.۳.۲	روش وتری	۳۷
۵.۳.۲	روش تکرار ساده	۴۰
فصل سوم	درونیابی و برونیابی	۴۹
۱.۳	مقدمه	۴۹
۲.۳	درونیابی	۵۰
۱.۲.۳	چند جمله‌ایهای لاگرانژ	۵۱
۲.۲.۳	چندجمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم‌شده نیوتن	۵۵
۳.۲.۳	تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی متساوی‌الفاصله باشند.	۶۲
۴.۲.۳	شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب	۶۹
۳.۳	خطای چند جمله‌ای درونیاب	۷۰
۴.۳	برونیابی	۷۳
فصل چهارم	مشتق‌گیری و انتگرالگیری عددی	۷۹
۱.۴	مشتق‌گیری عددی	۷۹

۱.۱.۴ دستورهای مشتق‌گیری براساس چند جمله‌ای درونیاب ۸۰
۲.۱.۴ دستورات مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور................ ۸۴
۲.۴ خطای مشتق‌گیری عددی ۸۶
۳.۴ انتگرالگیری عددی ۸۸
۱.۳.۴ قاعده ذوزنقه‌ای ۸۹
۲.۳.۴ قاعده سیمپسون ۹۱
۳.۳.۴ قاعده‌های دیگر انتگرالگیری ۹۴
روش نیوتن - کاتس.. ۹۴
روش گاوس.. ۹۷
فرمول دونقطه‌ای گاوس ۹۸
فرمول سه نقطه‌ای گاوس..................................... ۱۰۱
۴.۴ انتگرالهای منفرد.. ۱۰۳
۱.۴.۴ قاعده نقطه میانی ۱۰۳
۵.۴ خطای روشهای انتگرالگیری ۱۰۶
۱.۵.۴ خطای روش ذوزنقه ۱۰۷
۲.۵.۴ خطای سایر روشهای انتگرالگیری ۱۱۲
فصل پنجم روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی ۱۱۹
۱.۵ مقدمه ۱۱۹
۲.۵ روش بسط تیلور ۱۲۰
۱.۲.۵ الگوریتم روش تیلور از مرتبه k ۱۲۲
۳.۵ روش اویلر... ۱۲۳
۴.۵ روش رونگه - کوتا ۱۲۵
۱.۴.۵ روش رونگه - کوتای مرتبه دو ۱۲۶
۲.۴.۵ روش رونگه - کوتای مرتبه چهار ۱۲۸
۵.۵ دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۱۳۱
۱.۵.۵ روش رونگه - کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات
دیفرانسیل مرتبه اول ۱۳۲
۶.۵ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ۱۳۵
فصل ششم ماتریسها و حل دستگاههای معادلات خطی و غیرخطی ۱۴۱
۱.۶ مقدمه ۱۴۱
۱.۱.۶ ماتریسها و بردارها................................ ۱۴۱

۲.۶ دستگاههای معادلات خطی ۱۵۰
۱.۲.۶ روشهای مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی ۱۵۲
۲.۲.۶ روشهای تکراری حل دستگاههای معادلات خطی ۱۶۳
۳.۶ دستگاههای معادلات غیرخطی ۱۷۰
۴.۶ به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد ۱۷۶
فصل هفتم تعیین مقادیر ویژه ماتریسها ۱۸۷
۱.۷ مقدمه ۱۸۷
۲.۷ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ۱۸۷
۳.۷ تعیین چندجملهای مشخصه یک ماتریس ۱۹۰
۱.۳.۷ روش ضرائب نامعین برای به دست آوردن چندجملهای مشخصه ماتریس A ۱۹۰
۲.۳.۷ روش لوری برای به دست آوردن چندجملهای مشخصه ماتریس A ۱۹۳
۳.۳.۷ روش لوری برای به دست آوردن چندجملهای مشخصه ماتریس A ۱۹۵
۴.۷ تعیین بردار ویژه نظیر یک مقدار ویژه مشخص ۱۹۷
۵.۷ به دست آوردن وارون یک ماتریس با استفاده از قضیه کیلی ـ هامیلتون ۱۹۹
۶.۷ روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه ۲۰۱
فصل هشتم روش حداقل مربعات ۲۰۷
۱.۸ مقدمه ۲۰۷
۲.۸ خط حداقل مربعات ۲۰۸
۳.۸ چندجملهای حداقل مربعات ۲۱۴
۴.۸ انواع دیگری از تقریبهای حداقل مربعات ۲۱۷
۱.۴.۸ حالت نمایی ۲۱۸
۲.۴.۸ حالت هذلولی ۲۲۰
۳.۴.۸ حالت مثلثاتی ۲۲۱
پیوست برنامههای کامپیوتری ۲۲۸
پیوست مسائل چهارگزینهای ۲۴۷
قسمت اول (مسائل چهارگزینهای حل شده) ۲۴۸
قسمت دوم (آزمونهای کارشناسی ارشد با حل تشریحی) ۲۸۱
قسمت سوم (مسائل چهارگزینهای حل نشده) ۳۱۰
قسمت چهارم (حل مسائل قسمت سوم) ۳۲۱

فصل اول

خطاها

۱.۱ مقدمه

هدف محاسبات عددی، حل مسائل عددی پیچیده، تنها با استفاده از اعمال ساده حساب به منظور توسعه و ارزیابی روشها برای محاسبه نتایج عددی از اطلاعات معلوم است. روشهای محاسبه، **الگوریتم** نامیده می‌شوند. به خاطر اهداف این کتاب، الگوریتم را به عنوان توصیفی کامل و بدون ابهام از روش ساختن جواب یک مسأله ریاضی تعریف می‌کنیم. هدف ما جستجوی الگوریتمهای محاسباتی است. در حالی که بعضی مسائل دارای چندین الگوریتم برای حل هستند، مسائلی یافت می‌شوند که هنوز الگوریتم رضایت بخشی برای حل ندارند.

هرگاه یک مسأله الگوریتم‌های متفاوتی برای حل داشته باشد، دلایل متفاوتی برای انتخاب یکی از آنها به عنوان الگوریتم بهتر وجود دارد. دو دلیل عمده این انتخاب سرعت و دقت الگوریتم می‌باشد. پیشرفتهای سریع در طراحی کامپیوترهای رقمی تأثیر فراوانی در محاسبات عددی داشته است. هم اینک کامپیوترها میلیونها عمل محاسباتی را درکمتر از یک ثانیه انجام می‌دهند. این بدان

معنی است که انجام محاسبات طولانی و پیچیده امکانپذیر شده، اما در عوض امکان وجود خطا نیز افزایش یافته است.کسانی که الگوریتمهای محاسباتی را طرح و از آنها استفاده می‌کنند، باید در مورد بهتر به کار گرفتن کامپیوترهای رقمی برای انجام محاسبات، اطلاعاتی داشته باشند.

برنامه‌نویسی کامپیوتر اساساً به مسأله به رمز در آوردن الگوریتمها به شکلی مناسب برای کامپیوتر مربوط می‌شود.با توجه به این که روشهای عددی شامل محاسبات زیاد روی اعداد است و انجام این محاسبات با دست امکانپذیر نیست، لازم است محاسبات توسط یک ابزار محاسباتی صورت گیرد.در ماشین حساب و کامپیوتر، اعداد، علی الخصوص اعداد اصم و اعداد گویایی که دارای بسط اعشاری متناهی نیستند، مانند $\frac{۱}{۳} = ۰٫۱۳۳۳۰۰۰$ به صورت تقریبی ذخیره می‌شوند. با انجام محاسبه روی این اعداد تقریبی، خطاهای موجود در آنها روی جواب نهایی اثر می‌گذارد، به نحوی که گاهی اوقات نتایج عددی بسیار دور از مقدار واقعی و در نتیجه بی فایده هستند.

۲.۱ خطای مطلق و نسبی

عدد تقریبی a عددی است که مقدار کمی با عدد دقیق A تفاوت داشته و به جای آن در محاسبات به کار برده می‌شود.

تعریف ۱.۱ اگر $a < A$ آن گاه a را تقریب نقصانی (کوچکتر) A و چنانچه $a > A$ در آن صورت a را تقریب اضافی (بزرگتر) A می‌نامیم.

مثال ۱. در مورد عدد $\sqrt{۲}$ داریم

$$۱٫۴۱ < \sqrt{۲} < ۱٫۴۲$$

لذا عدد ۱٫۴۱ یک تقریب نقصانی و عدد ۱٫۴۲ یک تقریب اضافی $\sqrt{۲}$ می‌باشد.

توجه : هرگاه a یک مقدار تقریبی برای عدد A باشد در آن صورت می‌نویسیم :

$$a \simeq A$$

تعریف ۲.۱ خطای مطلق عدد تقریبی a به عنوان یک تقریب از A را با $e(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{e(a) = |A - a| \qquad (1)}$$

توجه : برای عدد A دو حالت وجود دارد:

۱- عدد A معلوم است، در این صورت خطای مطلق $e(a)$ از فرمول (۱) بدست می‌آید.

۲- عدد A معلوم نیست، که اغلب چنین است، بنابراین خطای مطلق $e(a)$ از فرمول (۱) قابل محاسبه نخواهد بود.

در اکثر روشها پس از محاسبه a یک حد بالا برای خطای مطلق a قابل محاسبه است.

تعریف ۳.۱ خطای مطلق حدی یک عدد تقریبی a عددی است که از خطای مطلق آن کوچکتر نباشد و آن را با e_a نشان می‌دهیم، بنابراین

$$e(a) \le e_a$$

توجه : e_a منحصر به فرد نیست در حالی که $e(a)$ منحصر به فرد است.

مثال ۲. برای $A = \frac{۲}{۳}$ یک تقریب اضافی، یک تقریب نقصانی، خطای مطلق این تقریبها و یک خطای مطلق حدی را به دست آورید.

الف) $A = \frac{۲}{۳},\quad a = ۰{,}۶۷ \quad, e(a) = |\frac{۲}{۳} - \frac{۶۷}{۱۰۰}| = \frac{۱}{۳۰۰} \quad, e_a = ۰{,}۰۰۴$

$a = ۰{,}۶۷$ یک تقریب اضافی A است.

ب) $A = \frac{۲}{۳},\quad a = ۰{,}۶۶ \quad, e(a) = |\frac{۲}{۳} - \frac{۶۶}{۱۰۰}| = \frac{۲}{۳۰۰},\quad e_a = ۰{,}۰۱$

$a = ۰{,}۶۶$ یک تقریب نقصانی A است.

مثال ۳. اگر $A = \sqrt{۲}$ آن‌گاه ۱٫۴۱ تقریبی نقصانی و ۱٫۴۲ تقریبی اضافی از A است، واضح است که $|A - ۱{,}۴۱|$ و $|A - ۱{,}۴۲|$ هر دو اصم هستند، بنابراین خطای مطلق به سادگی قابل

محاسبه نیست، اما داریم :

$$|\sqrt{۲} - ۱/۴۱| < ۰/۰۰۵, \qquad e_a = ۰/۰۰۵$$

$$|\sqrt{۲} - ۱/۴۲| < ۰/۰۰۶, \qquad e_a = ۰/۰۰۶$$

توجه : هرگاه e_a خطای مطلق حدی a به عنوان تقریبی از عدد A باشد، آن گاه

$$|A - a| \leq e_a$$

بنابراین

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

بنا بر قرارداد، نامساوی اخیر را منحصراً به صورت زیر می‌نویسیم :

$$A = a \pm e_a$$

مثال ۴. اگر $A = ۱/۳۲۴ \pm ۰/۰۰۳$ در این صورت $۱/۳۲۱ \leq A \leq ۱/۳۲۷$

توجه : نامساوی $۱/۳۲۱ \leq A \leq ۱/۳۲۷$ در مثال ۴ نشان می‌دهد که در بسط اعشاری A حتماً ۱/۳۲ موجود است، ولی رقم سوم اعشار یکی از ارقام ۱ تا ۷ می‌باشد.لذا رقم ۴ مشکوک است.

معمولاً خطای مطلق حدی و حتی خطای مطلق برای نشان دادن دقت یک عدد تقریبی کفایت نمی‌کند.

مثال ۵. هرگاه در اندازه‌گیری دو طول برحسب سانتیمتر داشته باشیم :

$$L_۱ = ۲۳۵/۸ \pm ۰/۱$$

$$L_۲ = ۳/۲ \pm ۰/۱$$

علیرغم اینکه خطای مطلق حدی در هر دو مورد با هم برابرند ولی اندازه‌گیری اول بهتر از اندازه‌گیری دوم است زیرا در محاسبه L_1 طول بزرگتری اندازه‌گیری شده است، لذا در اندازه‌گیری L_1 دقت بیشتری انجام گرفته است. بنابراین آنچه دقت یک تقریب را مشخص می‌کند، خطا در واحد آن کمیت است.

تعریف ۴.۱ هرگاه a تقریبی از عدد $A \neq 0$ باشد کمیت زیر را **خطای نسبی** a می‌نامیم:

$$\boxed{\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|} \qquad (2)}$$

مثال ۶. هرگاه $A = \frac{2}{3}$ و $a = 0/67$ تقریبی از آن باشد، مطابق آنچه که در مثال ۲ بدست آمد، داریم:

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{A} = \frac{1}{200}$$

۳.۱ منابع اصلی خطا

خطاهایی را که در مسائل ریاضی با آنها مواجه می‌شویم عمدتاً به پنج گروه تقسیم می‌شوند:

۱- خطاهایی که درنحوه بیان مسائل وجود دارند. عبارات ریاضی بندرت تصویر دقیقی از پدیده‌های واقعی ارائه داده و در بیشتر موارد صرفاً مدلهایی ایده‌آل هستند. در مطالعه پدیده‌های طبیعی می‌بایست به عنوان یک قاعده، شرایطی را قبول کنیم که باعث ساده شدن مسأله گردند. این خود یکی از منابع خطاست. گاهی اوقات حل مسأله‌ای که دقیقاً فرمولبندی شده است، بسیار مشکل و یا حتی غیر ممکن می‌باشد. در چنین حالتی یک مسأله تقریبی به جای آن در نظر گرفته می‌شود که تا حدودی همان نتایج را به همراه دارد. این خود خطایی را به وجود می‌آورد که **خطای مدل** نامیده می‌شود.

۲- خطاهایی که از وجود عملیات نامتناهی ناشی می‌شوند. توابع به کار رفته در روابط ریاضی معمولاً

به صورت دنباله‌ها یا سریهای نامتناهی بیان می‌گردند، مثلاً

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

به علاوه بسیاری از مسائل ریاضی را تنها می‌توان با تعداد نامتناهی عملیات حل نمود که حل آنها جواب مسأله می‌باشد.به طور کلی از آنجا که یک فرآیند نامتناهی را نمی‌توان طی مراحل متناهی انجام داد، لازم است که دنباله عملیات را در مرحله‌ای قطع کرده و به یک جواب تقریبی مسأله مورد نظر بسنده نماییم.این قطع عملیات در یک مرحله باعث بروز خطا می‌گردد.این خطا را **خطای باقیمانده** و یا **خطای برشی** می‌نامیم.

۳- خطای پارامترهای عددی (مربوط به روابط) که مقادیر آنها از طریق اندازه‌گیری به دست می‌آیند.لذا مقادیر آنها را تنها می‌توان به طور تقریبی یافت، همانند همه ثابتهای فیزیکی.این نوع خطا، **خطای اولیه** یا **خطای داده‌ها** نامیده می‌شود.

۴- به خاطر محدودیت در ذخیره ارقام بسط اعشاری اعداد، تقریباً تمام اعداد اعشاری در وسایل محاسباتی با خطا ذخیره می‌شوند.این خطا،**خطای نمایش اعداد** نامیده می‌شود.

۵- هنگام اجرای محاسبات با اعداد تقریبی، خطاهای مربوط به داده‌های اولیه به نتیجه نهایی منتقل می‌گردند.این نوع خطا، **خطای عملیات** نامیده می‌شود.به عنوان مثال عدد π خود دارای مقدار تقریبی است لذا در محاسبهٔ عبارتی نظیر $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (زمان تناوب یک آونگ فیزیکی) خطای ناشی از مقدار π به نتیجه نهایی منتقل می‌گردد.

طبیعی است که، در یک مسأله خاص بعضی از خطاها حذف شده و برخی دیگر اثری ناچیز در نتیجه نهایی داشته باشند.ولی به طور کلی یک تحلیل کامل بایستی هر نوع خطایی را شامل گردد.در ادامه بحث خطاهای مربوط به عملیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

توجه : خطای نمایش اعداد گاهی **خطای گردکردن** نامیده می‌شود، روشهای متفاوتی برای گردکردن اعداد اعشاری وجود دارد.در اینجا روش زیر که روش مورد استفاده در ماشین‌های محاسباتی

می‌باشدتوضیح داده می‌شود.هرگاه بخواهیم یک عدد را تا n رقم اعشار گرد کنیم :

" اگر رقم $(n+1)$ام اعشار این عدد کمتر از ۵ باشد،در این صورت رقم $(n+1)$ام اعشار و تمام ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم.اما هرگاه رقم $(n+1)$ام اعشار بیشتر یا مساوی ۵ باشد یک واحد به رقم nام اعشار اضافه نموده و رقم $(n+1)$ام و ارقام بعد از آن را حذف می‌نماییم." بنابر این قانون، خطای گرد کردن همواره کمتر یا مساوی $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$ می‌باشد.

مثال ۶. عدد ۲٫۳۷۴۹ را در نظر بگیرید، در این صورت گرد شده این عدد تا دو رقم اعشار عبارت است از ۲٫۳۷ و گرد شده آن تا سه رقم اعشار برابر است با ۲٫۳۷۵ .

توجه : معمولاً تعداد ارقام اعشار یک عدد را با حرف D که تعداد ارقام اعشار عدد قبل از آن آمده است نشان می‌دهیم.

مثال ۷. عبارت $(3D)$۴٫۷۳۲ یعنی ۴٫۷۳۲ دارای سه رقم اعشار است.

۴.۱ خطای چهار عمل اصلی

الف. خطای حاصل جمع

هرگاه a و b تقریبهایی از A و B و این اعداد همگی مثبت باشند و e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق حدی a و b باشند و هرگاه e_c خطای مطلق حدی عدد $C = A + B$ باشد، در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

ب. خطای تفاضل

با مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = A - B$ در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

یعنی $e_a + e_b$ یک کران بالا برای خطای مطلق حدی C (در هر دو حالت) می‌باشد.

مثال ۸. هرگاه اعداد $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، مطلوبست محاسبه $\sqrt{۱۷} \pm \sqrt{۵}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل : داریم : $\sqrt{۱۷} = ۴/۱۲۳ + e_۱, \quad \sqrt{۵} = ۲/۲۳۶ + e_۲$

منظور از $e_۱$ و $e_۲$ خطای مرتکب شده در نمایش $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}$ می‌باشد.چون اعداد تا سه رقم اعشار گرد شده‌اند، پس

$$e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}, \quad e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

داریم : $\sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} = (۴/۱۲۳ + ۲/۲۳۶) + e_۳ = ۶/۳۵۹ + e_۳$

و چون $e_۳ \leq e_۱ + e_۲$ لذا $e_۳ \leq ۱۰^{-۳}$.در نتیجه

$$۶/۳۵۹ - ۱۰^{-۳} \leq \sqrt{۱۷} + \sqrt{۵} \leq ۶/۳۵۹ + ۱۰^{-۳}$$

همچنین $\sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} = ۱/۸۸۷ + e_۴$ که در اینجا نیز

$$e_۴ \leq e_۱ + e_۲ \leq ۱۰^{-۳}$$

بنابراین $۱/۸۸۷ - ۱۰^{-۳} \leq \sqrt{۱۷} - \sqrt{۵} \leq ۱/۸۸۷ + ۱۰^{-۳}$

مثال ۹. هرگاه اعداد π و $\sqrt{۲}$ را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبه $\pi \pm \sqrt{۲}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل : داریم : $\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_۱, \quad \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ + e_۲$

چون اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند، پس $e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}, \quad e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$

همچنین داریم : $\pi + \sqrt{۲} = (۳/۱۴۱۶ + ۱/۴۱۴۲) + e_۳ = ۴/۵۵۵۸ + e_۳$

که در آن

$$e_۳ \leq e_۱ + e_۲ \Longrightarrow e_۳ \leq ۱۰^{-۴}$$

در نتیجه $۴/۵۵۵۸ - ۱۰^{-۴} \leq \pi + \sqrt{۲} \leq ۴/۵۵۵۸ + ۱۰^{-۴}$ و به طور مشابه

$$\pi - \sqrt{۲} = ۱/۷۲۷۴ + e_۴$$

$$e_۲ \leq ۱۰^{-۴}$$

$$۱/۷۲۷۴ - ۱۰^{-۴} \leq \pi - \sqrt{۲} \leq ۱/۷۲۷۴ + ۱۰^{-۴}$$

$$۱/۷۲۷۳ \leq \pi - \sqrt{۲} \leq ۱/۷۲۷۵$$

پ. خطای حاصل ضرب

با مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = AB$ در این صورت

$$\boxed{e_c \leq ae_b + be_a \qquad (۳)}$$

توجه : در عمل تقسیم معمولاً به گونه‌ای عمل می‌شود که تقسیم تبدیل به عمل ضرب گردد، مثال ۱۱ نشان دهندهٔ این مطلب می‌باشد.

مثال ۱۰. مقدار $\pi\sqrt{۲}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل ضرب را نیز به دست آورید.

حل : داریم:

$$\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_۱$$

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ + e_۲$$

که در آن مانند مثال ۹ داریم:

$$e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}, \qquad e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\pi\sqrt{۲} = (۳/۱۴۱۶ \times ۱/۴۱۴۲) + e_۳$$

که بنا به رابطه (۳) برای $e_۳$ داریم:

$$e_۳ \leq ۳/۱۴۱۶ e_۲ + ۱/۴۱۴۲ e_۱$$
$$e_۳ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(۳/۱۴۱۶ + ۱/۴۱۴۲)$$
$$e_۳ \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-۴}(۴/۵۵۵۸) = ۲/۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

اما

$$\pi\sqrt{۲} = ۴/۴۴۲۹ + e'_۳$$

چون حاصل‌ضرب اعداد ۳/۱۴۱۶ و ۱/۴۱۴۲ در محاسبهٔ $\pi\sqrt{۲}$ بیشتر از چهار رقم اعشار دارد، هنگام نمایش حاصل‌ضرب دو عدد مذکور با چهار رقم اعشار خطای دیگری مرتکب شده‌ایم و خطای حدی کل را با $e'_۳$ نشان داده‌ایم. برای $e'_۳$ داریم:

$$e'_۳ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_۳$$
$$e'_۳ \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-۴} + ۲/۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴} = ۲/۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

لذا:

$$۴/۴۴۲۹ - ۲/۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴} \leq \pi\sqrt{۲} \leq ۴/۴۴۲۹ + ۲/۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$
$$۴/۴۴۲۶ \leq \pi\sqrt{۲} \leq ۴/۴۴۳۲$$

توجه : همانطور که مثال ۱۰ نشان می‌دهد، حاصل ضرب دو عدد تقریبی دارای خطای بیشتر از حاصل جمع و یا تفاضل اعداد تقریبی است. رابطه (۳) نشان می‌دهد که این خطا برای a و b بزرگ، می‌تواند مقداری قابل توجه باشد. اما هرگاه اعداد تقریبی که در هم ضرب می‌شوند کمتر یا مساوی یک باشند، خطای حاصل ضرب آنها در حد قابل قبول قرار خواهد داشت.

حداکثر خطا در حاصل ضرب سه عدد تقریبی :

هرگاه a و b و c تقریبهایی از A و B و C بوده و این اعداد همگی مثبت باشند، رابطه زیر برای خطای مطلق حدی حاصل ضرب abc به عنوان تقریبی از مقدار ABC بیان می‌شود :

$$\boxed{e_{abc} \leq abe_c + ace_b + bce_a \qquad (۴)}$$

روابط مشابه برای حاصل ضرب بیشتر از سه عدد تقریبی به راحتی قابل نوشتن است.

مثال ۱۱. هرگاه اعداد را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، عبارت $\frac{\pi}{۳\sqrt{۵}}$ را محاسبه نموده و یک خطای مطلق حدی برای این محاسبه بیان نمایید.

حل : قرار می‌دهیم $x = \frac{\pi}{۳\sqrt{۵}}$، لذا

$$x = \pi.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{\sqrt{۵}} = \pi.\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۵}.\sqrt{۵}$$
$$= \pi.\frac{۱}{۳}.(۰/۲)\sqrt{۵} = (۰/۲)\pi\frac{۱}{۳}\sqrt{۵}$$

مقدار ۰/۲ به طور دقیق مشخص است، چون اعداد را تا سه رقم اعشار نمایش می‌دهیم؛ خواهیم داشت:

$$\pi = ۳/۱۴۲ + e_\pi \quad , \quad e_\pi \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$\sqrt{۵} = ۲/۲۳۶ + e_{\sqrt{۵}} \quad , \quad e_{\sqrt{۵}} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳ + e_{\frac{۱}{۳}} \quad , \quad e_{\frac{۱}{۳}} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

و از آن‌ها داریم :

$$x = (۰/۲)۳/۱۴۲ \times ۲/۲۳۶ \times ۰/۳۳۳ + e_x$$

$$x = ۰/۴۶۸ + e'_x$$

توجه داشته باشید که چون حاصل ضرب اعداد فوق بیش از سه رقم اعشار دارد، هنگام نمایش این حاصل ضرب‌ها با سه رقم اعشار، خطای دیگری مرتکب می‌شویم که خطای حدی کل را با

e'_x نشان داده‌ایم. در واقع داریم :

$$e'_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲} + e_x$$

بنا به رابطه (۴) برای e_x داریم :

$$\begin{aligned}
e_x &\leq ۰٫۲[۲٫۲۳۶ \times ۰٫۳۳۳ e_\pi + ۳٫۱۴۲ \times ۰٫۳۳۳ e_{\sqrt{۵}} + ۳٫۱۴۲ \times ۲٫۲۳۶ e_{\frac{۱}{۳}}] \\
e_x &\leq ۰٫۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} \times ۸٫۸۱۶ \\
e_x &\leq ۸٫۸۱۶ \times ۱۰^{-۴}
\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}
e'_x &\leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲} + ۸٫۸۱۶ \times ۱۰^{-۴} \\
e'_x &\leq ۱٫۳۸۲ \times ۱۰^{-۲}
\end{aligned}$$

۵.۱ خطای محاسبه فرمولها و توابع

الف. خطای محاسبه فرمولها

هرگاه تابعی n متغیره به صورت $w = f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = ۱, \cdots, n$ حساب کنیم، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(A_۱, A_۲, \cdots, A_n) = f(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) + e_f$$

که در آن .

$$e_f \leq e_{a_۱} \frac{\partial f}{\partial x_۱}\Big|_a + e_{a_۲} \frac{\partial f}{\partial x_۲}\Big|_a + \cdots + e_{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_a \qquad (۵)$$

در رابطه (۵) منظور از $\mathbf{a}$ بردار مقادیر تقریبی a_i یعنی $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ می‌باشد، همچنین $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\mathbf{a}}$ به معنی محاسبه مقدار تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ به ازای بردار $\mathbf{a}$ است.

مثال ۱۲. حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۵}{۳}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را به دست آورید.اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

حل : داریم : $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و یا $V = xyz^۲$ که در آن

$$x = \frac{۴}{۳} = ۱{,}۳۳۳۳ + e_x \quad , \qquad e_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$
$$y = \pi = ۳{,}۱۴۱۶ + e_y \quad , \qquad e_y \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$
$$z = \frac{۵}{۳} = ۱{,}۶۶۶۷ + e_z \quad , \qquad e_z \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین

$$V = (۱{,}۳۳۳۳)(۳{,}۱۴۱۶)(۱{,}۶۶۶۷)^۲ + e_V$$
$$V = ۱۹{,}۳۹۳۳ + e'_V$$

که در آن مشابه مثال ۱۱ داریم :

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_V$$
$$e_V \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در $(۱{,}۳۳۳۳, ۳{,}۱۴۱۶, ۱{,}۶۶۶۷)$ محاسبه کرد.لذا

$$e_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}\{yz^۲ + xz^۲ + ۲xyz^۲\}$$

مقدار سمت راست به ازای $x = ۱{,}۳۳۳۳$، $y = ۳{,}۱۴۱۶$ و $z = ۱{,}۶۶۶۷$ به صورت زیر

خواهد بود :

$$e_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵}\{۱۴/۵۴۵۳ + ۶/۱۷۳۱ + ۳۴/۹۰۷۲\}$$

$$e_V \leq ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۵ \times ۱۰^{-۵} + ۰/۰۰۲۸$$

$$e'_V \leq ۰/۰۰۲۸۵$$

و در نتیجه $V = ۱۹/۳۹۳۳ \pm ۰/۰۰۲۸۵$

ب. خطای محاسبه توابع

در اکثر مسائل محاسبات عددی، نیاز به محاسبه توابعی مانند $\sin x$ و $\sqrt{x}$ و $\ln x$ و $\cdots$ در دامنه تعریف آنها پیش می‌آید. در محاسبهٔ این توابع علاوه بر خطای موجود در نمایش x به شکل اعشاری و با تعدادی متناهی رقم، خطای دیگری نیز وارد می‌شود که ذیلاً آن را بررسی می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم مقدار $e^{۱/۳}$ را حساب کنیم، می‌دانیم

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

مقدار $e^{۱/۳}$ یعنی مقدار سری واقع در سمت راست تساوی بالا به ازای $x = \frac{۱}{۳}$. چون محاسبهٔ حاصل جمع بینهایت جمله (عدد) عملاً امکانپذیر نیست، معمولاً تعدادی متناهی از جملات نخست این سری، متناسب با دقت لازم، انتخاب و به ازای $x = \frac{۱}{۳}$ یا تقریب مناسبی از $\frac{۱}{۳}$، محاسبه می‌شود. در واقع می‌نویسیم:

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

که در آن $E_n(x)$ عبارتست از : $E_n(x) = \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!} + \frac{x^{n+۲}}{(n+۲)!} + \cdots$

$E_n(x)$ باقیمانده سری یا **خطای برشی** در x نامیده می‌شود، بنابراین برای محاسبهٔ $e^{۱/۳}$، تقریبی

از آن یعنی مقدار $\frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$ را به ازای $x = \frac{1}{3}$ حساب می‌کنیم.اما در عمل به جای $\frac{1}{3}$ تقریبی از آن را استفاده می‌کنیم که به فرم اعشاری دارای تعدادی متناهی رقم است.مثلاً اگر بخواهیم $e^{1/3}$ را با خطای کمتر از 10^{-3} حساب کنیم، قرار می‌دهیم: $|E_n(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

(به ضریب $\frac{1}{2}$ در سمت راست عبارت فوق توجه نمایید، چون مجبوریم $x = \frac{1}{3}$ را به صورت تقریبی بنویسیم که آن هم دارای خطای حدی $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ می‌باشد.)

برای محاسبه n، معمولاً از اولین جمله $E_n(x)$ استفاده می‌شود.یعنی قرار می‌دهیم :

$$E_n(x) \simeq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین برای محاسبهٔ $e^{1/3}$ با خطای کمتر از 10^{-3} قرار می‌دهیم

$$\frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4}$$

برای $n = 3$ نامساوی فوق برقرار نیست، اما برای $n \geq 4$ نامساوی برقرار است. لذا باید مقدار زیر را حساب کنیم:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{9}}{2} + \frac{\frac{1}{27}}{6} + \frac{\frac{1}{81}}{24}$$

خطای محاسبه این مجموع باید چنان کوچک باشد که در مقایسه با خطای برشی، قابل اغماض یا حداکثر در حدود آن باشد.لذا لازم است قرار دهیم $\frac{1}{3} = 0{,}3333 (4D)$ و عبارت فوق را محاسبه کنیم.پس از انجام محاسبات داریم :

$$\begin{aligned} e^{1/3} &\simeq 1 + 0{,}3333 + 0{,}0556 + 0{,}0062 + 0{,}0005 \\ &= 1{,}3956 \end{aligned}$$

بنابراین با ۳ رقم اعشار خواهیم داشت :

$$e^{1/3} \simeq 1{,}396 \quad (3D)$$

توجه : همان گونه که در بالا دیده می‌شود، هر چند که نتیجه $e^{۱/۲}$ را با ۳ رقم اعشار می‌خواهیم، اما محاسبات میانی را با ۴ رقم اعشار انجام داده‌ایم که این مطلب را در حالت کلی به صورت قاعدهٔ زیر بیان می‌کنیم :

قاعده : هرگاه نتیجه یک عبارت را تا n رقم اعشار بخواهیم، محاسبات میانی را با $(n+۱)$ رقم اعشار انجام داده و نتیجه نهایی را در آخر کار با n رقم اعشار ارائه می‌نماییم.

مثال ۱۴. مقدار تقریبی تابع $\sin x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{۷}$ و با خطای کمتر از $۱۰^{-۳}$ حساب کنید.

حل : داریم

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \pm \cdots$$

در اینجا قرار می‌دهیم $|E_n(x)| = \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$

$$x = \frac{\pi}{۷} = \pi \frac{۱}{۷} = ۳/۱۴۱۶ \times ۰/۱۴۲۹ = ۰/۴۴۸۹$$

بنابراین بایستی n را طوری تعیین کنیم که

$$\frac{(۰/۴۴۸۹)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۴}$$

برای $n \geq ۲$ نامساوی فوق برقرار می‌باشد، در نتیجه

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{۷} &\simeq ۰/۴۴۸۹ - \frac{(۰/۴۴۸۹)^۳}{۳!} + \frac{(۰/۴۴۸۹)^۵}{۵!} \\ &= ۰/۴۴۸۹ - ۰/۰۱۵۱ + ۰/۰۰۰۲ \\ &= ۰/۴۳۴۰ \quad (۴D)\end{aligned}$$

لذا با سه رقم اعشار خواهیم داشت :

$$\sin \frac{\pi}{۷} \simeq ۰/۴۳۴(۳D)$$

مجموعه مسائل فصل اول.

۱- هرگاه a تقریبی از A باشد، خطای مطلق a را به عنوان تقریب A در حالتهای زیر حساب کنید.

الف. $A = \frac{۱}{۳۰۰}$ و $a = ۰/۰۰۳$

ب. $A = ۲/۵۴۷۵$ و $a = ۲/۵۴۸$

پ. $A = ۲/۱۰۰۰۰۷$ و $a = ۲/۱۰۰$

ت. $A = \frac{۱}{۳}$ و $a = ۰/۳۳$

جواب. الف. $\frac{۱}{۳۰۰۰}$ ب. $۰/۰۰۰۵$ پ. ۷×۱۰^{-۶} ت. $\frac{۱}{۳۰۰}$

۲- یک کران خطای حدی را برای تقریب a از عدد A در هر یک از حالتهای مسأله ۱ ارائه نمایید.

جواب. الف . ۵×۱۰^{-۴} ب. ۵×۱۰^{-۴} پ. ۵×۱۰^{-۵} ت. ۵×۱۰^{-۳}

۳- هرگاه π و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه $\pi\sqrt{۵}$ و $\frac{\pi}{\sqrt{۵}}$ و محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده در هر حالت.

جواب. $\pi\sqrt{۵} \simeq ۷/۰۲۶$ با حداکثر خطای $۰/۰۰۳۲$

$\frac{\pi}{\sqrt{۵}} \simeq ۱/۴۰۵$ با حداکثر خطای $۰/۰۰۲۳$

۴- هرگاه x و y را تا چهار رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوبست محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده در $x \pm y$ و xy که $x = \sqrt{۱۱}$ و $y = \pi$.

جواب. $۱۰^{-۴}$ برای جمع و تفریق و ۴×۱۰^{-۴} برای ضرب .

۵- حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۷}{۳}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای آن را بنویسید.(با سه رقم اعشار).

جواب. $V = ۵۳/۱۸۴$ و حداکثر خطا $۰/۰۶۳$.

۶- مقدار تقریبی توابع زیر را به ازای xهای داده شده و با تقریب داده شده ϵ حساب کنید:

الف. $\sin x \quad x=\frac{\pi}{5}, \quad x=-\frac{1}{3}, \quad \epsilon=10^{-2}$

ب. $\cos x \quad x=\frac{\pi}{11}, \quad x=\frac{\sqrt{2}}{5}, \quad \epsilon=10^{-2}$

پ. $e^{-x} \quad x=\frac{1}{3}, \quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon=10^{-3}$

ت. $\ln(1+x) \quad x=\frac{1}{7}, \quad x=-\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \epsilon=10^{-4}$

ث. $\frac{1}{1+x^2} \quad x=\frac{1}{5}, \quad x=\frac{1}{7}, \quad \epsilon=10^{-2}$

۷ـ ثابت کنید $\delta(a) \leqslant \frac{e(a)}{|a|-e_a}$ و از آنجا نتیجه بگیرید اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد آن گاه

$$\delta(a) \leqslant \frac{e(a)}{|a|}$$

۸ـ اگر a_iها $(1 \leqslant i \leqslant n)$ همگی اعدادی مثبت باشند نشان دهید

الف. $e(\sum_{i=1}^{n} a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} e(a_i)$

ب. $\delta(\sum_{i=1}^{n} a_i) \leqslant \max\{\delta(a_1), \cdots, \delta(a_n)\}$

۹ـ اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B و این اعداد همگی مثبت باشند ثابت کنید: $e_{ab} \leqslant ae_b + be_a$

۱۰ـ فرض کنید f تابعی n متغیره به صورت $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ باشد. نشان دهید هرگاه نقاط $A = a_i + e_{a_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ را در تابع قرار دهیم، داریم

$$e_f \leqslant \sum_{i=1}^{n} e_{a_i} \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|(a_1, \cdots, a_n)$$

۱۱ـ مقدار $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ را برای xهای بزرگ با $4D$ به دست آورید و آن را با مقدار $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ مقایسه کنید و از آن نتیجه بیگرید که تفریق دو عدد نزدیک به هم می‌توانند با خطای زیاد توأم باشد.

۱۲ـ با یک برنامه کامپیوتری مناسب کوچکترین مقدار مثبت ϵ را برای یک کامپیوتر به دست آورید به طوری که هرگاه با عددی مانند ۱ جمع شود حاصل بیشتر از یک باشد. این عدد را اپسیلون ماشین یا eps می‌نامند (یعنی $1 + \text{eps} > 1$ و اگر $0 < \alpha < \text{eps}$ آن گاه $1 + \alpha \not> 1$).

فصل دوم

حل عددی معادلات $f(x) = 0$

۱.۲ مقدمه

یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم، حل معادله‌ای به شکل $f(x) = 0$ است که در آن f یک تابع مفروض است.منظور از حل معادله $f(x) = 0$، یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود.هرگاه $f(\alpha) = 0$، آن گاه α را یک ریشه معادله می‌نامیم و یا می‌گوییم α یک صفر تابع f است.

خواننده با حل تحلیلی معادلاتی مانند معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و تعیین ریشه‌های آن آشنا می‌باشد.همچنین بعضی معادلات مانند معادلات مثلثاتی، نظیر

$$\sin 2x + 3\cos 2x = 1$$

به روشهای کلاسیک قابل حل هستند.اما معادلاتی مانند معادلات زیر، قابل حل با روشهای تحلیلی

نبوده و برای حل آنها بایستی روشهای تقریبی مورد استفاده قرار گیرد:

$$e^{-x} - \cos x = ۰$$

$$x + \cos x = ۰$$

$$x^{۲} - (۱ - x)^{۵} = ۰$$

معمولاً برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله با دقت مورد نظر، لازم است تقریبی از آن ریشه یا فاصله کوچکی را که حاوی آن ریشه باشد، معلوم کرد. به این منظور محدودیتهای زیر را در نظر می‌گیریم :

محدودیت الف: فاصله‌ای موجود باشد که شامل ریشه باشد.

محدودیت ب: بایستی ریشه در فاصله مورد نظر یکتا باشد.

از نظر ریاضی محدودیت «الف» را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱- تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته است.

۲- $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامتند، یعنی $f(a)f(b) < ۰$.

در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانی، عددی مانند α در فاصلهٔ $[a, b]$ وجود دارد، به طوری که :

$$f(\alpha) = ۰$$

با داشتن شرایط ۱ و ۲، محدودیت «ب» از نظر ریاضی، به صورت زیر بیان می‌شود:

۳- برای هر $x \in [a, b]$:

$$f'(x) \neq ۰$$

۲.۲ تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر

با مشخص بودن فاصله‌ای که شامل یک ریشهٔ معادله $f(x) = ۰$ است، برای تعیین تقریبی از ریشهٔ مورد نظر با دقت مطلوب، دنباله‌ای از اعداد مانند x_n می‌سازیم به طوری که با افزایش n،

مقدار x_n به α نزدیک شود، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

بنابراین با توجه به تعریف حد، عددی مانند N وجود دارد که

$$x_N \simeq \alpha$$

تعیین Nای که تقریب فوق را بدهد، معیار توقف محاسبهٔ x_nها نامیده می‌شود.در اینجا سه معیار برای توقف ارائه می‌شود.لازم به توضیح است که در یک مسأله پیچیده لزومی ندارد تا استفادهٔ صرف از یکی از این معیارها کافی باشد، و قاعدتاً باید شانس استفاده از هر سه معیار را به طور مناسب در الگوریتم قرار داد.

الف) هرگاه ϵ عددی معلوم و مفروض باشد (مثلاً $\epsilon = 10^{-6}$)، x_nها را تا جایی محاسبه می‌کنیم که $|f(x_N)| < \epsilon$.یعنی به محض اینکه $|f(x_N)| < \epsilon$، عملیات محاسبهٔ x_n را متوقف می‌کنیم و x_N را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

ب) هرگاه اختلاف دو x_n متوالی، مثلاً x_{N-1} و x_N عدد کوچکی شود، یعنی هرگاه برای ϵ معلوم داشته باشیم $|x_N - x_{N-1}| < \epsilon$، در این صورت عملیات را متوقف نموده و x_N را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

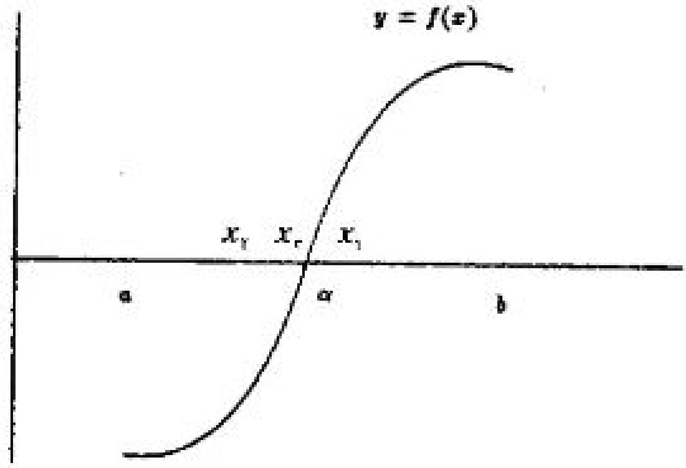
پ) هرگاه تعداد تکرار یا به عبارت دیگر n از یک عدد مشخص بیشتر شود، الگوریتم خاتمه یافته و x_n را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

در قسمت بعد، چند روش عددی را برای تعیین ریشهٔ معادله $f(x) = 0$ معرفی می‌کنیم.در تمام حالتها فرض می‌کنیم محدودیتهای «الف» و «ب» برقرارند.

۳.۲ روش‌های عددی حل معادله $f(x) = ۰$

۱.۳.۲ روش دو بخشی یا روش تنصیف

هرگاه شرایط ۱ تا ۳ برقرار بوده و α ریشه معادله $f(x) = ۰$ باشد، در این صورت نقطهٔ $(\alpha, ۰)$ بر روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد، مطابق شکل زیر:



در روش دو بخشی وسط فاصله $[a, b]$ را به عنوان اولین تقریب α در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم :

$$x_۱ = \frac{a + b}{۲}$$

برای $x_۱$ سه حالت وجود دارد:

۱- $f(x_۱) = ۰$، که در این صورت $x_۱$ ریشه معادله بوده و قرار می‌دهیم $\alpha = x_۱$.

۲- $f(a)f(x_۱) < ۰$ یعنی ریشه بین a و $x_۱$ است، که در این صورت در تکراربعدی فاصله $[a, x_۱]$ را برای تعیین ریشه معاد... نظ میگیریم.

۳- $f(a)f(x_۱) > ۰$، یعنی ...که در این صورت در تکرار بعدی فاصلهٔ $[x_۱, b]$ را برای تعیین ریشه مع...

با مقدمه فوق، الگوریتم ا... ...یر خواهیم داشت :

الگوریتم روش دو بخشی.

قدم ۱. قرار دهید $x = \frac{a+b}{۲}$.

قدم ۲. اگر $f(a)f(x) < ۰$، آن‌گاه ریشه در فاصله (a, x) است، قرار دهید $b = x$ و مجدداً قدم ۱ را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

قدم ۳. اگر $f(a)f(x) > ۰$، آن‌گاه ریشه در فاصله (x, b) است، قرار دهید $a = x$ و مجدداً قدم ۱ را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

قدم ۴. اگر $f(a)f(x) = ۰$، آن‌گاه x ریشه است و عملیات خاتمه پیدا می‌کند.

نکته ۱. از آنجا که لزومی ندارد که قدم ۴ اتفاق بیافتد، بنابراین جهت کنترل خطا و پایان الگوریتم باید معیارهای توقف ذکر شده را در الگوریتم به طور مناسب به کار گرفت.

نکته ۲. روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد، یعنی همواره با دقت مورد نظر به جواب خواهیم رسید.

برنامه روش دو بخشی برای حل معادلهٔ $F(x) = ۰$.

در این برنامه تابع $F(x) = x + \cos x$ اختیار شده است.مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر **eps** به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Bisection Method
c
        F(x)=x+cos(x)
        read(*,*) a,b,eps
        x=(a+b)/2
        n=1
10      if (abs(F(x)) .ge. eps) then
           if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
              a=x
           else
              b=x
           endif
           x=(a+b)/2
           n=n+1
           goto 10
        else
           write(*,*) "ROOT = ",x
           write(*,*) "ITERATION = ",n
        endif
        end
```

مثال ۱. تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = ۳x - e^{-x} = ۰$ را که در فاصلهٔ $(۰/۲۵, ۰/۲۷)$ قرار دارد، با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم؛ $|f(x_n)| < ۰/۰۰۱$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.

حل: با توجه به الگوریتم مذکور، جدول زیر را خواهیم داشت :

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	−	۰٫۰۰۸۹
۲	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	+	−۰٫۰۰۹۹
۳	۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	+	−۰٫۰۰۰۵

چون $|f(x_۳)| = ۰٫۰۰۰۵ < ۰٫۰۰۱$ بنابراین $x_۳$ را به عنوان تقریب ریشه معادله در نظر می‌گیریم.لذا هرگاه α ریشه مورد نظر باشد، با سه رقم اعشار قرار می‌دهیم :

$$\alpha \simeq ۰٫۲۵۸$$

تذکر ۱. با توجه به نکته بیان شده در فصل اول چون در مثال ۱ تقریب را با سه رقم اعشار خواسته‌ایم، محاسبات میانی را با چهار رقم اعشار انجام داده و در نهایت $x_۳$ را تا سه رقم اعشار گرد نموده به عنوان تقریب α قرار داده‌ایم.بدیهی است این تعداد رقم اعشار برای محاسبات میانی لزوماً در هر مسأله مفید نخواهد بود و باید بسته به نوع مسأله، خود استفاده کننده از الگوریتم، در این مورد تصمیم بگیرد.

تذکر ۲. دقت کنید که شرایط ۱ تا ۳ برای معادلهٔ مثال ۱ برقرارند، زیرا داریم :

$$f(a) = f(۰٫۲۵) = -۰٫۰۲۸۸$$

$$f(b) = f(۰٫۲۷) = +۰٫۰۴۶۶$$

پس f در فاصله $(۰٫۲۵, ۰٫۲۷)$ دارای ریشه می‌باشد، همچنین داریم :

$$f'(x) = ۳ + e^{-x} > ۰ \qquad \text{همواره}$$

مثال ۲. تقریبی از ریشه معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ را که در فاصلهٔ $(۰, ۱)$ قرار دارد، به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.تقریب

را با $۴D$ به دست آورید.

حل:

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰/۵	+	−۰/۳۷۵
۲	۰/۵	۱	۰/۷۵	−	۰/۱۷۱۸۸
۳	۰/۵	۰/۷۵	۰/۶۲۵	+	−۰/۱۳۰۸۶
۴	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۰/۶۸۷۵۰	−	۰/۰۱۲۴۵
۵	۰/۶۲۵	۰/۶۸۷۵	۰/۶۵۶۲۵	+	−۰/۰۶۱۱۳
۶	۰/۶۵۶۲۵	۰/۶۸۷۵	۰/۶۷۱۸۸	+	−۰/۰۲۴۸۳
۷	۰/۶۷۱۸۸	۰/۶۸۷۵	۰/۶۷۹۶۹	+	−۰/۰۰۶۳۱

چون $۱۰^{-۲} > |f(x_۷)| = ۰/۰۰۶۳۱$ لذا تقریب ریشه با $۴D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰/۶۷۹۷$$

مثال ۳. تقریبی از ریشه معادله $x^۲ - (۱-x)^۵ = ۰$ را که در فاصله $(۰, ۱)$ قرار دارد با $۴D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.

حل:

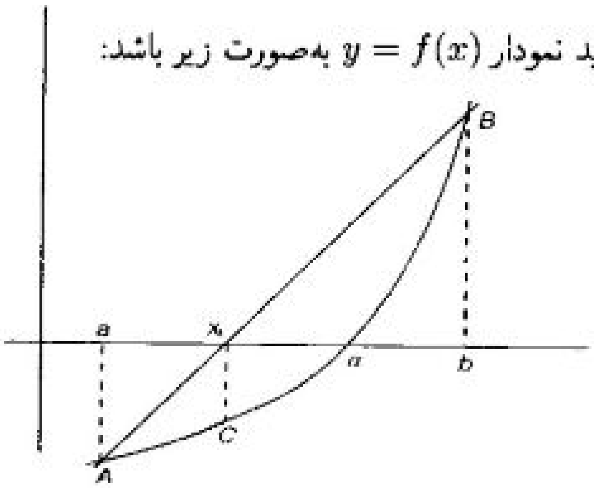
n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰/۵	−	۰/۲۱۸۷۵
۲	۰	۰/۵	۰/۲۵	+	−۰/۱۷۴۸۰
۳	۰/۲۵	۰/۵	۰/۳۷۵	−	۰/۰۴۵۲۶
۴	۰/۲۵	۰/۳۷۵	۰/۳۱۲۵۰	+	−۰/۰۵۵۹۳
۵	۰/۳۱۲۵۰	۰/۳۷۵	۰/۳۴۳۷۵	+	−۰/۰۰۳۵۵

چون $۱۰^{-۲} > |f(x_۵)| = ۰/۰۰۳۵۵$ بنابراین تقریب ریشه با $۴D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰/۳۴۳۸$$

۲.۳.۲ روش نابجایی

برای توضیح روش نابجایی، فرض کنید نمودار $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد:



دو نقطه A و B واقع بر منحنی را با یک خط مستقیم به هم وصل می‌کنیم، محل تلاقی این خط با محور xها را به عنوان اولین تقریب α یعنی x_1 در نظر می‌گیریم. حال چون (طبق شکل فوق) ریشه بین x_1 و b است مجدداً با یک خط مستقیم دو نقطه B و C بر روی منحنی را به هم وصل می‌کنیم و محل تلاقی این خط با محور xها را x_2 یعنی دومین تقریب ریشه در نظر می‌گیریم. این کار را تا جایی ادامه دهیم که به اندازهٔ کافی به ریشه α نزدیک شویم.

برای تعیین x_1 ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم، این معادله به‌صورت زیر است:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

زیرا مختصات نقاط A و B به ترتیب عبارتند از $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$. چون $(x_1,0)$ بر روی خط فوق واقع است، لذا خواهیم داشت:

$$\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}$$

و از آن

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

حال با توجه به اینکه ریشه در فاصلهٔ $[a, x_1]$ و یا در فاصلهٔ $[x_1, b]$ قرارگرفته باشد، عمل فوق را در یکی از فاصله‌های مذکور تکرار می‌کنیم بنابراین با توجه به مفروضات روش دو بخشی، در روش نابجایی قرار می‌دهیم :

$$\boxed{x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \qquad (1)}$$

و حالتهای زیر را بررسی می‌کنیم :

اگر $f(a)f(x) < 0$ آن گاه ریشه در (a, x) است، لذا قرار می‌دهیم $b = x$ و x جدید را از رابطه (۱) حساب می‌کنیم.

اگر $f(a)f(x) > 0$ آن گاه ریشه در (x, b) است، لذا قرار می‌دهیم $a = x$ و x جدید را از رابطه (۱) حساب می‌کنیم.

اگر $f(a)f(x) = 0$ آن گاه ریشه برابر x بوده و کار تمام است.

نکته روش نابجایی نیز مانند روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد.

برنامه روش نابجایی برای حل معادلهٔ $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x + \cos x$ اختیار شده است.مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Regula Falsi Method
c
        F(x)=x+cos(x)
        read(*,*) a,b,eps
        x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
        n=1
10      if (abs(F(x)) .ge. eps) then
            if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
                a=x
            else
                b=x
            endif
            x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
            n=n+1
            goto 10
        else
                write(*,*) "ROOT = ",x
                write(*,*) "ITERATION = ",n
        endif
        end
```

مثال ۴. تقریبی از ریشه معادله $f(x)=3x-e^{-x}=0$ را به روش نابجایی با سه رقم اعشار به دست آورید.این ریشه در فاصله $(0/25, 0/27)$ قرار دارد.محاسبات را تا جایی ادامه دهید که $|f(x_n)|\geq 2\times 10^{-4}$.

حل: با توجه به رابطه (۱) و اینکه $a=0{,}25$ و $b=0{,}27$ داریم :

$$x_1=\frac{0{,}25\times 0{,}0466-0{,}27\times(-0{,}0288)}{0{,}0466-(-0{,}0288)}=0{,}2576$$

$$f(x_1)=-0{,}0001$$

لذا $|f(x_1)|=0{,}0001<2\times 10^{-4}$.بنابراین x_1 تقریب ریشه بوده و این تقریب با سه رقم اعشار عبارت است از :

$$\alpha\simeq 0{,}258$$

(نتیجه را با مثال ۱ مقایسه کنید.)

مثال ۵. تقریبی از ریشه معادله $f(x)=x^2-2^x=0$ را که در فاصله $(-1,0)$ قرار دارد به روش نابجایی با $4D$ به دست آورید به طوری که $|f(x_n)|<10^{-2}$.

حل: هرگاه قرار دهیم $x_n=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت :

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-1	0	$-0{,}66667$	$0{,}5$	$-0{,}18552$	$-$
۲	-1	$-0{,}66667$	$-0{,}75688$	$0{,}5$	$-0{,}01892$	$-$
۳	-1	$-0{,}75688$	$-0{,}76574$	$0{,}5$	$-0{,}00179$	$-$

چون $|f(x_3)|=0{,}00179<10^{-2}$ پس x_3 تقریب مورد نظر ریشه است.لذا با $4D$ تقریب ریشه عبارت است از :

$$\alpha\simeq -0{,}7657$$

مثال ۶. به روش نابجایی تقریبی از ریشه منفی معادله $f(x)=\sin x-\dfrac{x}{2}=0$ را که در فاصله $(-2,-1)$ قرار دارد با $4D$ به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)|<10^{-2}$.

حل: برای $x_n=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت:

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۲	-۱	$-۱٫۷۹۰۱۳$	$۰٫۰۹۰۷۰$	$-۰٫۰۸۰۹۸$	$-$
۲	-۲	$-۱٫۷۹۰۱۳$	$-۱٫۸۸۹۱۲$	$۰٫۰۹۰۷۰$	$-۰٫۰۰۵۲۰$	$-$

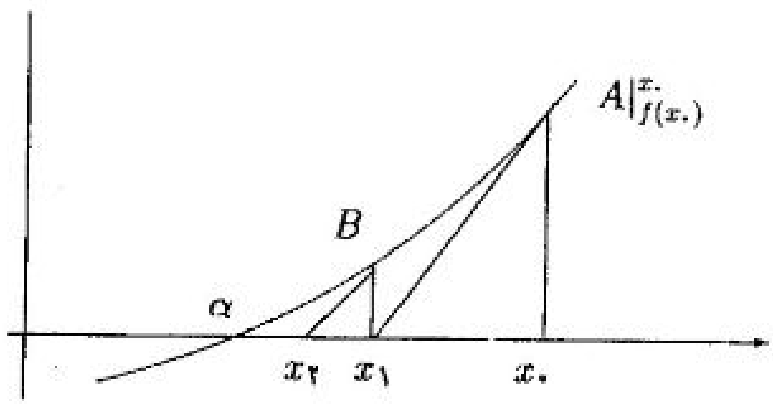
چون $|f(x_۲)|=۰٫۰۰۵۲<۱۰^{-۲}$ پس $x_۲$ تقریب مورد نظر از ریشه است. بنابراین با $۴D$ این تقریب عبارت است از:

$$\alpha \simeq -۱٫۸۸۹۱$$

توجه: هنگام محاسبه معادلاتی که شامل توابع مثلثاتی هستند، مد (حالت) رادیان ماشین حساب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳.۳.۲ روش نیوتن-رفسون

برای توضیح این روش، فرض کنید نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر باشد:



همانگونه که شکل فوق نشان می‌دهد α ریشه مورد نظر است. هرگاه $x_۰$ تقریبی از ریشه باشد، از نقطه $A(x_۰,f(x_۰))$ واقع بر منحنی $y=f(x)$ مماس بر منحنی را رسم می‌کنیم. محل تلاقی این مماس را با محور طولها $x_۱$ می‌نامیم. سپس از نقطه $B(x_۱,f(x_۱))$ واقع بر منحنی مماس را

رسم می‌کنیم و محل تلاقی این مماس جدید را با محور طولها x_2 می‌نامیم.این عمل را تا جایی که به تقریب مطلوب برسیم، یعنی x_nها به اندازه کافی به ریشه α نزدیک شوند، ادامه می‌دهیم.

با داشتن x_0 برای تعیین x_1، بایستی معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در نقطه $A(x_0, f(x_0))$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور xها تعیین کنیم. ضریب زاویه این خط مماس $m = f'(x_0)$ است، بنابراین معادله خط مماس عبارت است از :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

محل تلاقی این خط با محور طولها را $(x_1, 0)$ می‌گیریم، لذا

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

که اگر $f'(x_0) \neq 0$ خواهیم داشت :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بنابراین در حالت کلی با در دست داشتن x_n خواهیم داشت :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (۲)}$$

رابطه (۲) فرمول تکرار روش نیوتن-رفسون یا به اختصار روش تکرار نیوتن نامیده می‌شود.

نکته: روش نیوتن تضمین همگرایی ندارد، اما به محض قرارگرفتن در مسیر همگرایی می‌توان نشان داد x_nها سریع به جواب مورد نظر میل می‌کند.

برنامه روش نیوتن برای حل معادلهٔ $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x - \cos x$ اختیار شده است.مشتق تابع $\text{Fprime}(x) = 1 + \sin x$ به برنامه داده شده است.مقدار x_0 و دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و مشتق آن و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست

آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Newton's Method
c
        F(x)=x-cos(x)
        Fprime(x)=1+sin(x)
        read(*,*) x0,eps
        x=x0 - F(x0) / Fprime(x0)
        n=1
10      if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
        x0=x
        x=x0 - F(x0) / Fprime(x0)
        n=n+1
        goto 10
20      write(*,*) "ROOT = ",x
        write(*,*) "ITERATION = ",n
        end
```

مثال ۷. ریشه معادلهٔ $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصلهٔ $[0, 1]$ قرار دارد به روش نیوتن با چهار رقم اعشار به دست آورید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ که x_n تقریب ریشه مورد نظر در تکرار nام است.قرار دهید $x_0 = 0/5$.

حل: داریم $f(x)=x-\cos x$ و $f'(x)=1+\sin x$، لذا از رابطه (۲) خواهیم داشت :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\cos x_n}{1+\sin x_n}$$

با قرار دادن $x_0=0/5$ داریم :

$$x_1=0/75522$$

$$x_2=0/73914$$

$$x_3=0/73909$$

چون $|x_3-x_2|=5\times10^{-5}<10^{-4}$ لذا x_3 تقریب ریشه مورد نظر است و با $4D$ این تقریب عبارتست از :

$$\alpha\simeq0/7391$$

مثال ۸. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ را که در فاصله $[1/5,2]$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)|<10^{-4}$. قرار دهید $x_0=1/75$.

حل: داریم $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ و $f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$، لذا رابطه زیر را برای محاسبه x_nها خواهیم داشت:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin x_n-\frac{x_n}{2}}{\cos x_n-0/5}$$

$$x_0=1/75$$

$$x_1=1/91069$$

$$x_2=1/89563$$

$$f(x_2)=-0/00011$$

چون $|f(x_۲)| < ۱۰^{-۴}$ لذا $x_۲$ تقریبی از ریشه مورد نظر است و با $۴D$ این تقریب عبارتست از :

$$\alpha \simeq ۱/۸۹۵۶$$

توجه. همانگونه که مثالهای ۷ و ۸ نشان می‌دهند، تعداد تکرارهای لازم برای محاسبه ریشه یک معادله به روش نیوتن کمتر از این تعداد به روشهای قبلی است. همچنین هرگاه در مثال ۷ پس از محاسبه $x_۲$ تکرارها را ادامه دهیم خواهیم داشت :

$$x_۳ = ۰/۷۳۹۰۹$$

$$x_۴ = ۰/۷۳۹۰۹$$

$$x_۵ = ۰/۷۳۹۰۹$$

$$\vdots$$

به طور مشابه هرگاه در مثال ۸ پس از محاسبه $x_۱$ تکرارها را ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$x_۲ = ۱/۸۹۵۶۳$$

$$x_۳ = ۱/۸۹۵۴۹$$

$$x_۴ = ۱/۸۹۵۴۹$$

$$\vdots$$

مثال ۹. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $f(x) = ۳e^{x} - \frac{۱}{x} = ۰$ را که در فاصله $(۰/۲, ۰/۳)$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید. قرار دهید $x_۰ = ۰/۲۵$.

حل: داریم $f(x)=3e^x-\frac{1}{x}$ و $f'(x)=3e^x+\frac{1}{x^2}$، لذا:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{3e^{x_n}-\frac{1}{x_n}}{3e^{x_n}+\frac{1}{x_n^2}}$$

$$x_0=0{,}25$$

$$x_1=0{,}25745$$

$$x_2=0{,}25763$$

$$x_3=0{,}25763$$

$$\vdots$$

بنابراین $\alpha\simeq 0{,}2576$ تقریب ریشه با چهار رقم اعشار است.

مثال ۱۰. با ارائه روند تکراری نیوتن-رفسون ریشهٔ kام یک عدد مثبت c را حساب کنید و از آنجا تقریبی برای $\sqrt{2}$ بیابید.

حل: معادله $f(x)=x^k-c=0$ را در نظر می‌گیریم لذا برای یافتن ریشه kام c بایستی ریشهٔ معادله $f(x)=0$ را به دست آوریم. طبق روش تکراری نیوتن-رفسون با داشتن x_0 داریم :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-c}{kx_n^{k-1}}=\frac{kx_n^k-x_n^k+c}{kx_n^{k-1}}$$

$$x_{n+1}=\frac{(k-1)x_n^k+c}{kx_n^{k-1}}$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{k}\left((k-1)x_n+\frac{c}{x_n^{k-1}}\right)$$

لذا برای یافتن تقریبی از $\sqrt{2}$ داریم :

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

اگر $x_۰ = ۱$ در این صورت :

$x_۱ = ۱/۵۰۰۰۰۰۰$ $x_۲ = ۱/۴۱۶۶۶۶۷$ $x_۳ = ۱/۴۱۴۲۱۵۷$

$x_۴ = ۱/۴۱۴۲۱۳۶$ $x_۵ = ۱/۴۱۴۲۱۳۶$ ...

لذا ۱/۴۱۴۲۱۳۶ را به عنوان تقریبی از $\sqrt{۲}$ بر می‌گزینیم.

۴.۳.۲ روش وتری

می‌دانیم

$$\lim_{x \to x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

لذا هرگاه x مقداری نزدیک x_n باشد، مثلاً $x_{n-۱}$، در این صورت

$$\boxed{\frac{f(x_n) - f(x_{n-۱})}{x_n - x_{n-۱}} \simeq f'(x_n) \qquad (۳)}$$

بنابراین هرگاه در فرمول نیوتن، یعنی رابطه (۲) به جای $f'(x_n)$ مقدار تقریبی آن را از رابطه (۳) قرار دهیم به دست می‌آوریم :

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-۱})}{x_n - x_{n-۱}}}$$

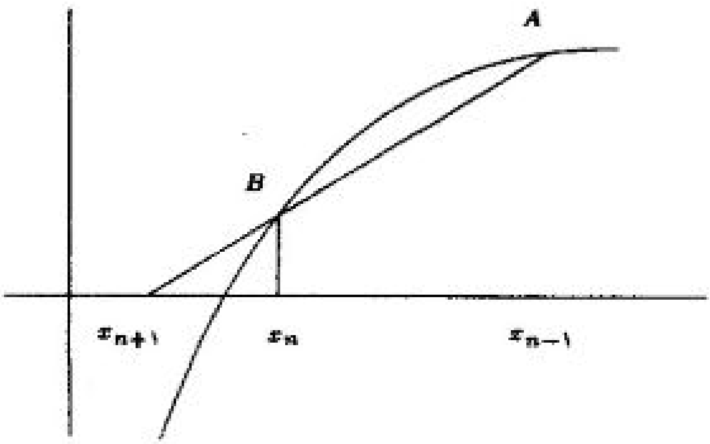
و یا

$$\boxed{x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-۱})}{f(x_n) - f(x_{n-۱})} \qquad (۴)}$$

رابطه (۴) فرمول روش وتری برای به دست آوردن ریشهٔ معادله $f(x) = ۰$ نامیده می‌شود. برای محاسبه تقریب‌های ریشه یعنی برای محاسبه x_nها از فرمول وتری به دو مقدار اولیه $x_۰$ و $x_۱$ نیاز داریم.

علت اینکه این روش را وتری نامند، آن است که در مرحلهٔ nام $x_{n+۱}$ از محل برخورد خط (وتر)

وصل نقاط $A|^{x_{n-1}}_{f(x_{n-1})}$ و $B|^{x_n}_{f(x_n)}$ با محور xها به دست می‌آید.به شکل زیر توجه کنید:



نکته: تفاوت عمده روش وتری با روش نابجایی در این است که در روش نابجایی در هر مرحله بررسی می‌شود و فاصله‌ای در نظر گرفته می‌شود که تابع در آن تغییر علامت می‌دهد.در حالی که در روش وتری صرفاً زیر فاصلهٔ آخر که نقاط انتهایی آن در تکرار اخیر به دست آمده‌اند، جهت تکرار روش به کار برده می‌شود و به همین دلیل روش وتری تضمین همگرایی ندارد، اما می‌توان نشان داد که سرعت همگرایی روش وتری (در صورت همگرایی) بیشتر از روش نابجایی است.

برنامه روش وتری برای حل معادلهٔ $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x^3 + x - 1$ اختیار شده است و مقادیر اولیه x_0 و x_1 و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c  Secant Method
c
      F(x)= x**3 + x - 1
      read(*,*) x0,x1,eps
```

```
       x=x1-(F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0))
       n=1
10     if(abs(F(x)).lt.eps) goto 20
       x0=x1
       x1=x
       x=x1-(F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0))
       n=n+1
       goto 10
20     write(*,*) 'ROOT = ',x
       write(*,*) 'ITERATION = ',n
       end
```

مثال ۱۱. با استفاده از روش وتری ریشه‌معادله $x^2 + x - ۱ = ۰$ را با سه رقم اعشار به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۰/۰۰۱$ (قرار دهید $x_0 = ۰$ و $x_1 = ۱$).

حل: با استفاده از رابطه (۴) و $x_0 = ۰$ و $x_1 = ۱$ خواهیم داشت:

$$x_2 = ۰/۵$$

$$x_3 = ۰/۶۳۶۴ \qquad f(x_3) = -۰/۱۰۵۹$$

$$x_4 = ۰/۶۹۰۱ \qquad f(x_4) = ۰/۰۱۸۸$$

$$x_5 = ۰/۶۸۲۰, \qquad f(x_5) = -۰/۰۰۰۸$$

چون $|f(x_5)| < ۰/۰۰۱$ پس

$$\alpha \simeq ۰/۶۸۲ \qquad (۳D)$$

۵.۳.۲ روش تکرار ساده

در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله $f(x)=0$ در فاصله $[a,b]$، معادله $f(x)=0$ پس از دستکاریهایی به صورت $x=g(x)$ نوشته می‌شود.به طوری که α ریشهٔ هر دو معادله باشد، یعنی :

$$f(\alpha)=0 \qquad \& \qquad \alpha=g(\alpha)$$

توجه ۱. معمولاً از روی یک معادله $f(x)=0$ به صورتهای مختلفی می‌توان به شکل $x=g(x)$ رسید.

مثال ۱۲. معادله $f(x)=x^2-x-2=0$ را در نظر بگیرید، در این صورت برای تابع $g(x)$ انتخابهای زیر وجود دارد :

الف. $g(x)=x^2-2$

ب. $g(x)=\sqrt{x+2}$

پ. $g(x)=1+\frac{2}{x}$

توجه ۲. بدیهی‌ترین صورتهای ممکن برای تبدیل معادله $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ عبارتند از :

$$x=x-f(x)$$

$$x=x+f(x)$$

پس از نوشتن معادله $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$، هرگاه x_0 تقریبی از α، ریشه معادله باشد x_nها به طریق زیر ساخته می شوند :

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$$\vdots$$

و به طور کلی با در دست داشتن x_n قرار می‌دهیم :

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2 \cdots \qquad (5)}$$

رابطه (۵) فرمول روش تکرار ساده برای به دست آوردن α، ریشه معادله $f(x) = 0$، نامیده می‌شود.

شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده :

برای اطمینان از اینکه x_nهایی که از رابطه (۵) محاسبه می‌شوند، به ریشه α از معادله $f(x) = 0$ میل می‌کنند یا خیر، دو شرط زیر را به عنوان شرط کافی همگرایی دنباله $\{x_n\}$ بیان می‌کنیم :

۱- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a, b]$

۲- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $|g'(x)| < 1$.

توجه: شرایط فوق شرایط کافی هستند، بنابراین هرگاه تابع $g(x)$ دارای دو شرط فوق باشد x_nها به α میل می‌کنند.لذا پس از تشکیل معادله $x = g(x)$، ابتدا شرایط فوق را بررسی می‌کنیم هرگاه $g(x)$ در هر دو شرط صدق کرد با داشتن x_0 مقادیر x_n را از رابطه (۵) محاسبه می‌کنیم، و اگر $g(x)$ حداقل یکی از شرایط را نداشت، یک g دیگر انتخاب می‌کنیم.

برنامه روش تکرار ساده برای حل معادلهٔ $F(x) = 0$.

این برنامه برای به دست آوردن ریشه معادلهٔ $F(x) = e^{-x} - \sin x = 0$ مورد استفاده قرار گرفته است.تابع $G(x)$ به صورت $G(x) = x + e^{-x} - \sin x$ اختیار شده است. مقدار x_0 و

دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و $G(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه، ریشهٔ مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```
c
c       Fixed Point Iteration Method
c
c       This program solves the equation EXP(-X)-SIN(X)=0
c       by fixed point iteration, using the iteration function
c       G(X)=X+EXP(-X)-SIN(X)
c
        F(x)= exp(-x) - sin(x)
        G(x)=x+exp(-x)-sin(x)
        read(*,*) x0,eps
        x=G(x0)
        n=1
10      if (abs(F(x)) .lt. eps ) goto 20
        x0=x
        x=G(x0)
        n=n+1
        goto 10
20      write(*,*) "ROOT = ",x
        write(*,*) "ITERATION = ",n
        end
```

مثال ۱۳. برای تعیین تقریب ریشه معادله $f(x) = ۳xe^x - ۱ = ۰$ که در فاصله $(۰, ۱)$ قرار دارد از روش تکرار ساده استفاده کنید.قرار دهید $x_۰ = ۰/۵$ و تقریب را با $۳D$ به دست آورید.

حل: معادله را به شکل $x = \frac{e^{-x}}{۳}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{۳}$$

برای نشان دادن دارا بودن شرایط ۱ و ۲ برای تابع g به صورت زیر عمل می‌کنیم، چون $x \in (۰, ۱)$ پس

$$۰ < x < ۱$$

$$-۱ < -x < ۰$$

$$e^{-۱} < e^{-x} < e^{۰}$$

$$\frac{۱}{۳e} < \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۳e} < g(x) < \frac{۱}{۳}$$

چون $\frac{۱}{۳e} = ۰/۱۲$، بنابراین $۰ < ۰/۱۲ < g(x) < \frac{۱}{۳} < ۱$

لذا برای $x \in (۰, ۱)$ داریم : $g(x) \in (۰, ۱)$.در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{۳}$$

و اگر $x \in (۰, ۱)$ خواهیم داشت :

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{۳} < \frac{e^{۰}}{۳} = \frac{۱}{۳} < ۱$$

بنابراین $g(x)$ مناسب است.با استفاده از $x_۰ = ۰/۵$ و از رابطه

$$x_{n+۱} = \frac{e^{-x_n}}{۳}$$

داریم :

$$x_1 = \circ/۲\circ۲۲ \qquad (۴D)$$

$$x_2 = \circ/۲۷۲۳$$

$$x_3 = \circ/۲۵۳۹$$

$$x_4 = \circ/۲۵۸۶$$

$$x_5 = \circ/۲۵۷۴$$

$$x_6 = \circ/۲۵۷۷$$

$$x_7 = \circ/۲۵۷۶$$

$$x_8 = \circ/۲۵۷۶$$

$$x_9 = \circ/۲۵۷۶$$

لذا

$$\alpha \simeq \circ/۲۵۸ \qquad (۳D)$$

مثال ۱۴. تقریبی از ریشهٔ معادله $f(x) = x - \cos x = \circ$ را که در فاصلهٔ $[\circ, ۱]$ قرار دارد با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱\circ^{-۲}$.قرار دهید $x_\circ = \circ/۵$.

حل: داریم $x = \cos x$ لذا قرار می‌دهیم $g(x) = \cos x$، برای $x \in [\circ, ۱]$ نشان می‌دهیم $g(x) \in [\circ, ۱]$:

$$\circ \leq x \leq ۱$$

چون تابع کسینوس بر $[\circ, ۱]$ تابعی نزولی است، پس

$$\cos ۱ \leq \cos x \leq \cos \circ$$

$$\circ/۵۴\circ۳ \leq \cos x \leq ۱$$

همچنین داریم $g'(x) = -\sin x$ و بایستی نشان دهیم $|\sin x| = |g'(x)| < 1$ برای $x \in [0,1]$ چون تابع سینوس روی $[0,1]$ تابعی صعودی است، پس برای $0 \le x \le 1$ خواهیم داشت:

$$\sin 0 \le \sin x \le \sin 1$$

$$0 \le \sin x \le 0{,}8415 < 1$$

بنابراین $|g'(x)| < 1$ در نتیجه $g(x)$ مناسب است.برای $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = \cos x_n$ داریم :

$$x_1 = 0{,}5403$$

$$x_2 = 0{,}8576$$

$$x_3 = 0{,}6543$$

$$x_4 = 0{,}7935$$

$$x_5 = 0{,}7014$$

$$x_6 = 0{,}7640$$

$$x_7 = 0{,}7221$$

$$x_8 = 0{,}7504$$

$$x_9 = 0{,}7314$$

$$x_{10} = 0{,}7442, \qquad f(x_{10}) = 0{,}0086$$

چون $|f(x_{10})| < 10^{-2}$ لذا $(3D)$ $\qquad \alpha \simeq 0{,}744$

توجه. گاهی به جای بیان اینکه " تقریب ریشه را طوری به دست آورید که $|f(x_n)| < \epsilon$ می‌گوییم " ریشه را با تقریب ϵ به دست آورید ".

مجموعه مسائل فصل دوم

۱- تقریبی از ریشه معادلات زیر را به روش دو بخشی حساب کنید، به طوری که $|f(x_n)| < \epsilon$ (a، b و ϵ داده شده‌اند) تقریب‌ها را با $۴D$ به دست آورید.

الف. $x - \cos x = ۰ \quad , a = ۰ \quad , b = ۱ \quad , \epsilon = ۱۰^{-۳}$

ب. $x^۲ - ۳ = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۲ \quad , \epsilon = ۱۰^{-۳}$

پ. $x^۲ + x - ۱ = ۰ \quad , a = ۰ \quad , b = ۱ \quad , \epsilon = ۱۰^{-۲}$

جواب.

الف. $\alpha \simeq ۰/۷۳۹۳ \quad , x_{۱۰} = ۰/۷۳۹۲۷$

ب. $\alpha \simeq ۱/۷۳۲۰ \quad , x_{۱۱} = ۱/۷۳۱۹۵$

پ. $\alpha \simeq ۰/۶۱۷۲ \quad , x_{۷} = ۰/۶۱۷۱۹$

۲- به روش دو بخشی تقریبی از ریشه معادلات زیر را با تقریب ϵ به دست آورید، نتایج را با $۴D$ به دست آورید. (a، b و ϵ داده شده‌اند)

الف. $\sin x - \frac{x}{۲} = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۳ \quad , \epsilon = ۰/۰۰۳$

ب. $x \sin x - ۱ = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۱/۵ \quad , \epsilon = ۰/۰۳$

پ. $x^۳ + ۴x^۲ - ۱۰ = ۰ \quad , a = ۱ \quad , b = ۲ \quad , \epsilon = ۰/۰۰۴$

جواب.

الف. $\alpha \simeq ۱/۸۹۸۴ \quad , x_{۸} = ۱/۸۹۸۴۴$

ب. $\alpha \simeq ۱/۱۲۵ \quad , x_{۲} = ۱/۱۲۵۰۰$

پ. $\alpha \simeq ۱/۳۶۵۲ \quad , x_{۹} = ۱/۳۶۵۲۳$

۳- با روش نابجایی معادلات زیر را با تقریب ϵ با $۴D$ به دست آورید. (a، b و ϵ داده شده‌اند)

الف. $۲\sin x + x - ۲ = ۰ \quad , a = ۰/۶ \quad , b = ۰/۸ \quad \epsilon = ۱۰^{-۲}$

ب. $۳\sin x - x - \frac{۱}{x} = ۰ \quad , a = ۰/۷ \quad , b = ۰/۹ \quad \epsilon = ۵ \times ۱۰^{-۵}$

پ. $x + \cos x = ۰ \quad , a = -۰/۷۵ \quad , b = -۰/۷۳ \quad , \epsilon = ۳ \times ۱۰^{-۵}$

جواب.

الف. $\alpha \simeq ۰/۷۰۴۶$ ب. $\alpha \simeq ۰/۷۶۳۱$ پ. $\alpha \simeq -۰/۷۳۹۱$

۴- ریشه معادله $f(x) = x - ۰/۲ \sin x - ۰/۵$ را که در فاصله $[۰/۵, ۱]$ قرار دارد به روش نیوتن به دست آورید.

جواب. $x_۲ = ۰/۶۱۵۴۶۸۱۶$

۵- به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $e^{-x} = \sin x$ را که در فاصله $(۰, ۱/۲)$ قرار دارد با $۷D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|x_n - x_{n-۱}| < ۱۰^{-۴}$. (قرار دهید $x_۰ = ۰/۶$)

جواب. $x_۲ = ۰/۵۸۸۵۳۲۷۴$ و $\alpha \simeq ۰/۵۸۸۵۳۲۷$

۶- به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادلهٔ $x^۲ - ۳ = ۰$ را که در فاصله $[۱, ۲]$ قرار دارد با $۳D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-۳}$. (قرار دهید $x_۰ = ۲$)

جواب. $x_۲ = ۱/۷۳۲۱$ و $\alpha \simeq ۱/۷۳۲$

۷- به روش وتری تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x) = x^۳ - ۰/۲x^۲ - ۰/۲x - ۱/۲$ را که در فاصله $(۱, ۲)$ قرار دارد با تقریب $۰/۰۰۲$ و با $۳D$ به دست آورید. (قرار دهید $x_۰ = ۱$ و $x_۱ = ۱/۵$)

جواب. $\alpha \simeq ۱/۱۹۸$

۸- با استفاده از روش نیوتن کوچکترین ریشه معادله $\tan x = x$ را با تقریب $۰/۰۰۰۱$ پیدا کنید. (این ریشه در فاصله $(\pi, \frac{۳\pi}{۲})$ قرار دارد.) قرار دهید $x_۰ = \frac{۳\pi}{۲}$ و ریشه را با $۵D$ به دست آورید.

راهنمایی. معادله را به صورت $f(x) = \sin x - x \cos x = ۰$ باز نویسی کنید.

جواب. $\alpha \simeq ۴/۴۹۳۴۱$

۹- با روش تکرار ساده تقریبی از ریشه معادلهٔ $f(x) = x - \sin x - ۰/۲۵ = ۰$ را که در فاصله $(۱/۱, ۱/۳)$ قرار دارد به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۳}$ (جواب را با $۳D$ به دست آورید.)

جواب. برای $g(x) = \sin x + ۰/۲۵$ و $x_۰ = ۱/۲$ داریم $\alpha \simeq ۱/۱۷۱$

۱۰- معادله $f(x)=x^2e^x-1=0$ ریشه‌ای در $[0,1]$ دارد.برای تعیین تقریبی از این ریشه به روش تکرار ساده $g(x)$ مناسب ارائه دهید و با فرض $x_0=0.7$ تقریبی از ریشه چنان حساب کنید که داشته باشیم $|f(x_n)|<0.0001$.(جواب با $4D$)

جواب. $g(x)=\sqrt{e^{-x}}$ و $\alpha\simeq 0.7035$

۱۱- معادلهٔ $f(x)=e^x-4x^2=0$ دارای ریشه‌ای در فاصلهٔ $[0,1]$ است.با قرار دادن $x=\frac{1}{2}e^{x/2}$ و انتخاب $x_0=0$ این ریشه را با تقریب 0.001 حساب کنید.(جواب با $4D$)

جواب. $x_8=0.71466$ و $\alpha\simeq 0.7147$

فصل سوم

درونیابی و برونیابی

۱.۳ مقدمه

در اغلب کشورها هر ده سال یکبار جمعیت سرشماری می‌شود.فرض کنید جدول زیر جمعیت کشوری را در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۹۰ میلادی (به هزار نفر) نشان می‌دهد:

سال	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰
(جمعیت به هزار نفر)	۱۰۷،۹۲۳	۱۲۶،۴۰۷	۱۳۳،۱۱۷	۱۵۰،۹۰۵	۱۷۱،۱۱۰	۱۹۲،۲۳۷

جدول (۱)

حال سوال این است که آیا می‌توان با توجه به داده‌های جدول فوق، جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ و یا در سال ۲۰۰۰ میلادی در حد قابل قبول تخمین زد.

تخمین جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ که بین اعداد جدول است **درونیابی** و تخمین جمعیت کشور را در سال ۲۰۰۰ که در فاصله [۱۹۴۰, ۱۹۹۰] قرار ندارد، **برونیابی** می‌نامیم.

هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط $x_\circ, x_1, \cdots, x_n$ به صورت $f_\circ, f_1, \cdots, f_n$ معلوم باشد، درونیابی روندی برای تخمین مقادیر تابع $f(x)$ بین نقاط $x_\circ, x_1, \cdots, x_n$ است.

فرض کنید تابع $f(x)$ با جدول زیر داده شده است :

x_i	$x_\circ$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i) = f_i$	$f_\circ$	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

جدول (۲)

درونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \in (x_\circ, x_n)$ و $i = 1, \cdots, n-1$ ، $x \neq x_i$.

و برونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_\circ, x_n]$.

تعریف ۱.۳. تابعی مانند f که مقادیر آن دربعضی نقاط مشخص است و توسط جدولی مانند جدول (۲) بیان شده است، یک **تابع جدولی** نامیده می‌شود.

۲.۳ درونیابی

فرض کنید تابع f با جدول (۲) داده شده است، به طوری که برای $i \neq j$ داریم : $x_i \neq x_j$.

برای تخمین $f(x)$ که $x \in (x_\circ, x_n)$ برای $i = 1, \cdots, n-1$ ، $x \neq x_i$، یکی از راههای ساده این است که یک چند جمله‌ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i همان f_i باشد.یعنی برای $i = \circ, 1, \cdots, n$ داشته باشیم :

$$\boxed{P(x_i) = f_i \qquad (1)}$$

و بعد به جای $f(x)$ در فاصله $[x_\circ, x_n]$ با $P(x)$ کار کنیم.در این ارتباط قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. فقط یک چند جمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه n، وجود دارد که در شرط (۱) صدق می‌کند.

در قسمت‌های بعد به معرفی چند روش برای تعیین $P(x)$، که در شرط (۱) صدق می‌کند، خواهیم

پرداخت.

تعریف ۲.۳. چند جمله‌ای $P(x)$ که در شرط (۱) صدق می‌کند، **چند جمله‌ای درونیاب** f نامیده می‌شود.

۱.۲.۳ چند جمله‌ایهای لاگرانژ

در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x)$ هر یک، یک چند جمله‌ای درجه n باشند و داشته باشیم

$$\boxed{P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n \qquad (۲)}$$

که در آن برای $j = 0, 1, \cdots, n$ داریم :

$$\boxed{L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)} \qquad (۳)}$$

از (۳) داریم :

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 \ , \ i \neq j \\ 1 \ , \ i = j \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$P(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

یعنی چند جمله‌ای $P(x)$ که با (۲) تعریف می‌شود، در شرط (۱) صدق می‌کند.

تعریف ۳.۲. چند جمله‌ای $L_j(x)$ که با (۳) تعریف می‌شود.چند **جمله‌ای لاگرانژ** نامیده می‌شود که یک چند جمله‌ای از درجه n می‌باشد.

مثال ۱. چند جمله‌ای $P(x)$ را که مربوط به تابع جدولی زیر است، به دست آورید.

x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل: در این مثال داریم $n = ۲$، بنابراین چند جمله‌ایهای لاگرانژ $L_۰(x)$، $L_۱(x)$ و $L_۲(x)$ را که همگی از درجه ۲ هستند به دست می‌آوریم :

$$L_۰(x) = \frac{(x - x_۱)(x - x_۲)}{(x_۰ - x_۱)(x_۰ - x_۲)} = \frac{(x - ۰)(x - ۱)}{(-۱ - ۰)(-۱ - ۱)} = \frac{x^۲ - x}{۲}$$

$$L_۱(x) = \frac{(x - x_۰)(x - x_۲)}{(x_۱ - x_۰)(x_۱ - x_۲)} = \frac{(x + ۱)(x - ۱)}{(۰ + ۱)(۰ - ۱)} = -(x^۲ - ۱)$$

$$L_۲(x) = \frac{(x - x_۰)(x - x_۱)}{(x_۲ - x_۰)(x_۲ - x_۱)} = \frac{(x + ۱)(x - ۰)}{(۱ + ۱)(۱ - ۰)} = \frac{x^۲ + x}{۲}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۲) داریم :

$$\begin{aligned} P(x) &= L_۰(x)f_۰ + L_۱(x)f_۱ + L_۲(x)f_۲ \\ &= ۱ \times L_۰(x) + ۱ \times L_۱(x) + ۳ \times L_۲(x) \\ &= \frac{x^۲ - x}{۲} - (x^۲ - ۱) + \frac{۳}{۲}(x^۲ + x) \\ P(x) &= x^۲ + x + ۱ \end{aligned}$$

توجه: چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱ در شرط (۱) صدق می‌کند، زیرا مثلاً

$$P(x_۰) = P(-۱) = (-۱)^۲ + (-۱) + ۱ = ۱ = f_۰$$

$$P(x_۲) = P(۱) = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ = f_۲$$

مثال ۲. برای تابع جدولی مثال ۱ تقریبی از $f(۰/۵)$ بدست آورید.

حل: چون $x = ۰/۵$ بین نقاط جدولی مثال ۱ قرار داشته و برابر هیچکدام از آنها نیست، پس

$P(0/5)$ را به عنوان تقریب $f(0/5)$ محاسبه می‌کنیم، یعنی

$$f(0/5) \simeq P(0/5)$$
$$= 0/25 + 0/5 + 1 = 1/75$$

مثال ۳. چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورید.

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	7

حل: داریم $n = 3$، لذا بایستی چند جمله‌ایهای از درجه ۳ لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$، $L_2(x)$ و $L_3(x)$ را به دست آوریم :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x^3-x}{6}$$

چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ عبارت است از :

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

با توجه به جدول داریم :

$$P(x) = -2L_0(x) - 1L_1(x) + 0\,L_2(x) + 7L_3(x)$$
$$= \frac{-2(x^3-3x^2+2x)}{-6} - \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} + 0 + 7\frac{x^3-x}{6}$$
$$P(x) = x^3 - 1$$

مثال ۴. برای تابع جدولی مثال قبل تقریبهایی از $f(-\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۳}{۲})$ به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه $P(x) = x^{۳} - ۱$ خواهیم داشت:

$$f(-\frac{۱}{۲}) \simeq P(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۹}{۸}$$
$$f(\frac{۳}{۲}) \simeq P(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱۹}{۸}$$

مثال ۵. با اضافه کردن نقطه $(-۲, -۹)$ به جدول مثال ۳ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید.

حل: جدول جدید عبارت است از:

x_i	-۲	-۱	۰	۱	۲
f_i	-۹	-۲	-۱	۰	۷

لذا $n = ۴$ و چند جمله‌ایهای لاگرانژ عبارتند از:

$$L_{۰}(x) = \frac{x(x-۲)(x^{۲}-۱)}{۲۴} \quad , \quad L_{۱}(x) = \frac{x(x-۱)(x^{۲}-۴)}{-۶}$$
$$L_{۲}(x) = \frac{(x^{۲}-۴)(x^{۲}-۱)}{۴} \quad , \quad L_{۳}(x) = \frac{x(x+۱)(x^{۲}-۴)}{-۶}$$
$$L_{۴}(x) = \frac{x(x^{۲}-۱)(x+۲)}{۲۴}$$

در نتیجه چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از

$$\begin{aligned}P(x) &= -۹L_{۰}(x) - ۲L_{۱}(x) - L_{۲}(x) + ۰ \times L_{۳}(x) + ۷L_{۴}(x)\\ &= -\frac{۹}{۲۴}x(x-۲)(x^{۲}-۱) + \frac{۲}{۶}x(x-۱)(x^{۲}-۴) - \frac{۱}{۴}(x^{۲}-۴)(x^{۲}-۱)\\ &+ ۰ + \frac{۷}{۲۴}x(x^{۲}-۱)(x+۲)\end{aligned}$$

$$P(x) = x^{۳} - ۱$$

توجه: چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۵ همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۳ می‌باشد و دلیل آن این است که چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۳ از نقطه $(-۲, -۹)$ می‌گذرد.همچنین با اینکه در مثال ۵ داریم $n = ۴$ چند جمله‌ای درونیاب از درجه ۳ می‌باشد.

معایب روش لاگرانژ

۱- محاسبات برای تعیین چند جمله‌ای درونیاب زیاد است.

۲- درجه چند جمله‌ای درونیاب، تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می‌شود.

۳- با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی، کلیهٔ عملیات را بایستی مجدداً انجام داد.

۲.۲.۳ چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

تعریف ۴.۳.فرض کنید $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_۰, f_۱, \cdots, f_n$ مقادیر تابع f در این نقاط باشند.تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول بین x_i و $x_{i+۱}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{f[x_i, x_{i+۱}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+۱})}{x_i - x_{i+۱}} = \frac{f_i - f_{i+۱}}{x_i - x_{i+۱}} \qquad (۴)}$$

مثال ۶.تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول را بین $x_۰$ و $x_۱$ و بین $x_۱$ و $x_۲$ بنویسید.

حل:

$$f[x_۱, x_۲] = \frac{f_۱ - f_۲}{x_۱ - x_۲} \quad , \quad f[x_۰, x_۱] = \frac{f_۰ - f_۱}{x_۰ - x_۱}$$

تعریف ۵.۳. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین $x_i, x_{i+۱}$ و $x_{i+۲}$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\boxed{f[x_i, x_{i+۱}, x_{i+۲}] = \frac{f[x_i, x_{i+۱}] - f[x_{i+۱}, x_{i+۲}]}{x_i - x_{i+۲}} \qquad (۵)}$$

مثال ۷. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین $x_۰, x_۱$ و $x_۲$ را بنویسید.

حل:

$$f[x_۰, x_۱, x_۲] = \frac{f[x_۰, x_۱] - f[x_۱, x_۲]}{x_۰ - x_۲}$$

نکته: مشابه مثالهای فوق تفاضلات تقسیم شده از مرتبه بالاتر قابل تعریف است، اما به کمک جدول می‌توان تفاضلات تقسیم شده از مرتبه‌های مختلف را بدون نوشتن فرمولهای (۴) و (۵) و با تکیه بر مقادیر تفاضلات تقسیم شدهِ محاسبه شده از مرتبه پایین‌تر، نوشت.به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۸. جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۱-	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل: برای این منظور، جدول زیر را خواهیم داشت :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم
۱-	۱		
		$\frac{۱-۱}{-۱-۰}=۰$	
۰	۱		$\frac{۰-۲}{-۱-۱}=۱$
		$\frac{۱-۳}{۰-۱}=۲$	
۱	۳		

مثال ۹.با اضافه نمودن نقطه (۲,۷) به جدول مثال ۸، مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

حل:با استفاده از مقادیر به دست آمده در مثال ۸ کافیست نقطه (۲,۹) را به آخر جدول اضافه نموده و تفاضلات جدید را محاسبه کنیم.

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۱−	۱			
		۰		
۰	۱		۱	
		۲		۰
۱	۳		۱	
		۴		
۲	۷			

مثال ۱۰. جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۱−	۰	۱	۲	۳
f_i	۱−	۱	۱	۵	۱۹

حل: جدول تفاضلات به صورت زیر است:

تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
۱−	۱−				
		$\frac{-۱-۱}{-۱-۰}=۲$			
۰	۱		$\frac{۲-۰}{-۱-۱}=-۱$		
		$\frac{۱-۱}{۰-۱}=۰$		$\frac{-۱-۲}{-۱-۲}=۱$	
۱	۱		$\frac{۰-۴}{۰-۲}=۲$		$\frac{۱-۱}{-۱-۳}=۰$
		$\frac{۱-۵}{۱-۲}=۴$		$\frac{۲-۵}{۰-۳}=۱$	
۲	۵		$\frac{۴-۱۴}{۱-۳}=۵$		
		$\frac{۵-۱۹}{۲-۳}=۱۴$			
۳	۱۹				

هرگاه کسرها را ننویسیم، جدول فوق به صورت زیر خلاصه می‌شود:

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
−۱	−۱				
		۲			
۰	۱		−۱		
		۰		۱	
۱	۱		۲		۰
		۴		۱	
۲	۵		۵		
		۱۴			
۳	۱۹				

فرمول چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن :

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ عبارتست از

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) &= f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + \\ &(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \qquad (۶) \end{aligned}}$$

که در آن $f[x_0, x_1, \cdots, x_i]$ تفاضل مرتبه iام بین نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_i$ برای $i = ۱, \cdots, n$ می‌باشد و به صورت زیر برحسب تفاضلات مراتب قبلی محاسبه می‌شود :

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_i] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{i-1}] - f[x_1, \cdots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

مثال ۱۱. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید.

x_i	۰	۱	۳	۶
f_i	۱	−۶	۴	۱۶۹

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است :

تفاضلات تقسیم شدهٔ مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	<u>۱</u>			
		<u>−۷</u>		
۱	−۶		<u>۴</u>	
		۵		<u>۱</u>
۳	۴		۱۰	
		۵۵		
۶	۱۶۹			

بنا به رابطه (۶) چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] +$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

تفاضلات تقسیم شده مورد نیاز در رابطه فوق، اعداد بالایی جدول تفاضلات هستند که زیر آنها خط کشیده شده است، لذا خواهیم داشت :

$$P(x) = 1 - 7x + 4x(x - 1) + x(x - 1)(x - 3)$$

$$P(x) = x^3 - 8x + 1$$

مثال ۱۲. با افزودن نقطه (۱۰,۹۲۱) به تابع جدولی مثال قبل، مجدداً چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید.

حل: جدول جدید تابع f، به صورت زیر است :

x_i	۰	۱	۳	۶	۱۰
f_i	۱	$-$۶	۴	۱۶۹	۹۲۱

و جدول تفاضلات جدید به کمک جدول قبلی به صورت زیر خواهد بود :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
۰	۱				
		$-$۷			
۱	$-$۶		۴		
		۵		۱	
۳	۴		۱۰		۰
		۵۵		۱	
۶	۱۶۹		۱۹		
		۱۸۸			
۱۰	۹۲۱				

جدول تفاضلات مرتبه چهارم صفر شده است بنابراین در این حالت، چند جمله‌ای درونیاب همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱۱ یعنی چند جمله‌ای زیر خواهد بود :

$$P(x) = x^{۲} - ۸x + ۱$$

نکته: برعکس روش چند جمله‌ای‌های لاگرانژ، با اضافه نمودن نقطه یا نقاطی به یک جدول، برای محاسبه چند جمله‌ای درونیاب جدید از تمام محاسبات قبلی استفاده می‌شود.

مثال ۱۳. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید:

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۱			
		۰		
۱	۱		$\frac{1}{2}$	
		۱		$-\frac{1}{12}$
۲	۲		$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{2}$		
۴	۵			

لذا چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر خواهد بود :

$$P(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)$$

$$P(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$

مثال ۱۴. فرض کنید $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$، به روش نیوتن چند جمله‌ای از درجه حداکثر چهار را به دست آوریدکه تابع f را در نقاط متساوی الفاصله زیر درونیابی کند :

$$x_i = \frac{10i}{4} - 5 \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

حل: نقاط درونیابی عبارتند از :

$$x_0 = -5, \quad x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{5}{2}, \quad x_4 = 5$$

جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر خواهد بود :

تفاضلات مرتبهٔ

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
−۵	۰٫۰۳۸۴۶				
		۰٫۰۳۹۷۹			
−۲٫۵	۰٫۱۳۷۹۳		۰٫۰۶۱۰۱		
		۰٫۳۴۴۸۳		−۰٫۰۲۶۵۳	
۰	۱٫۰۰۰۰۰		−۰٫۱۳۷۹۳		۰٫۰۰۵۳۰۶
		−۰٫۳۴۴۸۳		۰٫۰۲۶۵۳	
۲٫۵	۰٫۱۳۷۹۳		۰٫۰۶۱۰۱		
		−۰٫۰۳۹۷۹			
۵	۰٫۰۳۸۴۹				

با استفاده از اعداد جدول که زیر آنها خط کشیده شده است، چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط $x_0, \cdots, x_4$ به صورت زیر است

$$P(x) = ۰٫۰۳۸۴۶ + ۰٫۰۳۹۷۹(x+۵) + ۰٫۰۶۱۰۱(x+۵)(x+۲٫۵)$$
$$- ۰٫۰۲۶۵۳(x+۵)(x+۲٫۵)x + ۰٫۰۰۵۳۰۶(x+۵)(x+۲٫۵)x(x-۲٫۵)$$

۳.۲.۳ تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی متساوی الفاصله باشند

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن در حالت کلی برای نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ چه متساوی الفاصله باشند، چه نباشند، چند جمله‌ای درونیاب را به دست می‌دهند. اما وقتی x_iها متساوی الفاصله باشند، فرمولهای ساده‌تری موجودند که در این قسمت آنها را به دست می‌آوریم.

نمادگذاری. هرگاه فاصله $[a,b]$ را به N زیر فاصله به صورت $[x_i, x_{i+1}]$ هر کدام به طول h تقسیم کنیم، می‌نویسیم :

$$x = a(h)b$$

که در آن $h = \frac{b-a}{N}$.

مثال ۱۵. نقاط $x = ۱(۰/۱)۲$ عبارتند از :

$$x_۰ = ۱, \quad x_۱ = ۱/۱, \quad x_۲ = ۱/۲, \cdots, x_{۱۰} = ۲$$

توجه: همانگونه که مثال ۱۵ نشان می‌دهد نقاط $x = a(h)b$ عبارتند از :

$$x_i = a + ih \qquad , \qquad i = ۰, ۱, ۲, \cdots, N$$

و

$$x_{i+۱} - x_i = h \qquad , \qquad i = ۰, ۱, ۲, \cdots, N - ۱$$

و هرگاه $a = x_۰$ در این صورت

$$x_i = x_۰ + ih \qquad , \qquad i = ۰, ۱, ۲, \cdots, N$$

در حالتی که نقاط x_i متساوی‌الفاصله هستند، یک تبدیل خطی را که باعث تغییرها می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$s(x) = s = \frac{x - x_۰}{h} \Longrightarrow x(s) = x = x_۰ + sh$$

بنابراین برای تبدیل خطی فوق خواهیم داشت :

$$f(x) = f(x_۰ + sh)$$

که آن را به طور خلاصه با f_s نشان می‌دهیم، یعنی

$$\boxed{f(x) = f(x_\circ + sh) = f_s \qquad (۷)}$$

رابطه (۷) یک چند جمله‌ای برحسب x را به یک چند جمله‌ای بر حسب s تبدیل می‌کند.

تعریف ۶.۳. عملگر تفاضل پیشرو، Δ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = \circ \\ \Delta^{i-۱} f_{s+۱} - \Delta^{i-۱} f_s, & i > \circ \end{cases} \qquad (۸)$$

مثال ۱۶. Δf_s و $\Delta^۲ f_s$ را بنویسید.

حل: بنا به روابط (۸) داریم :

$$\Delta f_s = \Delta^\circ f_{s+۱} - \Delta^\circ f_s = f_{s+۱} - f_s$$

$$\Delta^۲ f_s = \Delta f_{s+۱} - \Delta f_s = (\Delta^\circ f_{s+۲} - \Delta^\circ f_{s+۱}) - (f_{s+۱} - f_s)$$

$$= f_{s+۲} - ۲ f_{s+۱} + f_s$$

مشابه جدول تفاضلات تقسیم شده، هرگاه نقاط x_i متساوی الفاصله باشند، می‌توان جدول تفاضلات را که جدول **تفاضلات متناهی** هم نامیده شود، تشکیل داد.

مثال ۱۷. برای $n = ۳$ جدول تفاضلات به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$
$x_\circ$	$f_\circ$			
		$\Delta f_\circ$		
$x_۱$	$f_۱$		$\Delta^۲ f_\circ$	
		$\Delta f_۱$		$\Delta^۳ f_\circ$
$x_۲$	$f_۲$		$\Delta^۲ f_۱$	
		$\Delta f_۲$		
$x_۳$	$f_۳$			

مثال ۱۸. تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۰	-۱	۲	۹

حل.

x_i	f_i	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$
-۱	۰			
		$-۱-۰=-۱$		
۰	-۱		$۳+۱=۴$	
		$۲+۱=۳$		$۴-۴=۰$
۱	۲		$۷-۳=۴$	
		$۹-۲=۷$		
۲	۹			

فرمول چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو:

هرگاه x_i نقاط متساوی‌الفاصله باشند و $x = x_. + sh$، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب f برحسب تفاضلات پیشرو به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) &= f_. + s\Delta f_. + \frac{s(s-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_. + \frac{s(s-۱)(s-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_. + \cdots \\ &+ \frac{s(s-۱)(s-۲)\cdots(s-n+۱)}{n!}\Delta^n f_. \qquad (۹) \end{aligned}}$$

رابطه (۹) چند جمله‌ای $P(x)$ را برحسب تفاضلات پیشرو نشان می‌دهد، که به فرمول تفاضل پیشرو نیوتن موسوم است. و با توجه به اینکه داریم:

$$\frac{s(s-۱)(s-۲)\cdots(s-i+۱)}{i!} = \binom{s}{i}$$

بنابراین رابطهٔ (۹) را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم :

$$\boxed{P(x) = f_\circ + \binom{s}{1}\Delta f_\circ + \binom{s}{2}\Delta^2 f_\circ + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_\circ \qquad (10)}$$

مثال ۱۹. فرمول چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را برحسب تفاضلات پیشرو نیوتن به دست آورید.

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷

حل: جدول تفاضلات پیشرو به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
۱	$\underline{۲}$			
		$\underline{۳}$		
۲	۵		$\underline{۲}$	
		۵		۰
۳	۱۰		۲	
		۷		
۴	۱۷			

چند جمله‌ای درونیاب برحسب s عبارت است از

$$P(x) = f_\circ + s\Delta f_\circ + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_\circ = 2 + 3s + \frac{s(s-1)}{2} \times 2 = s^2 + 2s + 2$$

و چون $x = x_\circ + sh$ و اینکه $h = 1$ و $x_\circ = 1$ بنابراین $x = 1 + s$ و یا $s = x - 1$.

لذا چند جمله‌ای درونیاب برحسب x عبارت است از :

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

تعریف۷.۳. عملگر تفاضل پسرو، ∇، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\boxed{\nabla^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_s - \nabla^{i-1} f_{s-1}, & i > 0 \end{cases} \qquad (11)}$$

مثال ۲۰. ∇f_s و $\nabla^2 f_s$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از روابط (۱۱) خواهیم داشت :

$$\nabla f_s = \nabla^0 f_s - \nabla^0 f_{s-1} = f_s - f_{s-1}$$

و

$$\nabla^2 f_s = \nabla f_s - \nabla f_{s-1} = (f_s - f_{s-1}) - (\nabla^0 f_{s-1} - \nabla^0 f_{s-2})$$

$$= f_s - 2f_{s-1} + f_{s-2}$$

مثال ۲۱. برای $n = 3$، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید.

حل: این جدول به صورت زیر می‌باشد:

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

مثال ۲۲. برای تابع جدولی مثال ۱۸، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید:

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
-1	0			
		-1		
0	-1		4	
		3		0
1	2		4	
		7		
2	9			

فرمول چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$ وقتی x نزدیک نقاط انتهایی جدول است، لازم است که از تفاضلات پسرو، که برحسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شود، استفاده کنیم.

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0$ عبارت است از:

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \cdots \\ + \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \qquad (12) \end{aligned}}$$

که $x = x_n + sh$. رابطه (۱۲) چند جمله‌ای $P(x)$ را برحسب تفاضلات پسرو نشان می‌دهد، که به **فرمول تفاضل پسرو نیوتن** موسوم است.

توجه . همانگونه که مثال ۲۲ نشان می‌دهد $\nabla^i f_n$ برای $i = 1, \cdots, n$ اعداد انتهای جدول تفاضلات است.

مثال ۲۳. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مثال ۱۹ را با استفاده از تفاضلات پسرو بنویسید.

حل: با استفاده از فرمول (۱۲) و اعداد انتهایی جدول تفاضلات مثال ۱۹ داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= f_3 + s\nabla f_3 + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_3 \\ &= 17 + 7s + \frac{s(s+1)}{2}2 = s^2 + 8s + 17 \end{aligned}$$

چند جمله‌ای فوق، چند جمله‌ای درونیاب f بر حسب s است.برای به دست آوردن چند جمله‌ای درونیاب بر حسب x، چون $x = ۴ + s$ پس $s = x - ۴$، لذا

$$P(x) = (x - ۴)^۲ + ۸(x - ۴) + ۱۷ = x^۲ + ۱$$

۴.۲.۳ شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب

یک شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} P(x) & ۱ & x & x^۲ & \cdots & x^n \\ f_۰ & ۱ & x_۰ & x_۰^۲ & \cdots & x_۰^n \\ f_۱ & ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \cdots & x_۱^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & ۱ & x_n & x_n^۲ & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = ۰$$

چون $P(x_k) = f_k$ بنابراین هرگاه در دترمینان فوق قرار دهیم $x = x_k$ در این صورت دو سطر از ماتریس متناظر دترمینان مساوی بوده و بنابراین دترمینان صفر است هرگاه دترمینان را برحسب سطر اول بسط دهیم در این صورت یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n به دست می‌آید.استفاده از این روش به علت سخت بودن محاسبه دترمینان زیاد مورد توجه نیست.

مثال ۲۴. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به کمک روش دترمینان به دست آورید.

x_i	۰	۲
f_i	۱	۳

حل: بایستی بسط دترمینان زیر را بنویسیم؛ در این مثال داریم $n = 1$.

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2P(x) - 1(2) + x(1-3) = 0 \Longrightarrow P(x) = x + 1$$

۳.۳ خطای چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط دو به دو متمایز $x_0, x_1, \cdots x_n$ بوده و f دارای مشتق مرتبه $n+1$ باشد، آن گاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

که در آن c عددی نامشخص بوده و $x_0 < c < x_n$ و $f^{(k)}(x)$ مشتق مرتبه kام تابع f می‌باشد. به دلیل مشخص نبودن c، هرگاه M یک کران بالا برای $f^{(n+1)}(x)$ بر فاصله $[x_0, x_n]$ باشد، یعنی داشته باشیم :

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \qquad x \in [x_0, x_n]$$

بنابراین

$$\boxed{|f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+1)!} \qquad (13)}$$

رابطه (۱۳) یک کران بالا برای خطای چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ ارائه می‌دهد.

مثال ۲۵. چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ را در نقاط $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ به دست آورده و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. مقدار $|f(\frac{1}{2}) - P(\frac{1}{2})|$ را با کران بالا در $x = \frac{1}{2}$ مقایسه کنید.

حل: جدول مربوط به تابع عبارت است از:

x_i	f_i	تفاضل مرتبه اول
۰	۱	
		-۱
۱	۰	

لذا، چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر است:

$$P(x) = ۱ + (x - ۰) \times (-۱) = ۱ - x$$

واضح است که:

$$f(\frac{۱}{۲}) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad , \qquad P(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$|f(\frac{۱}{۲}) - P(\frac{۱}{۲})| = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۰/۲۱ \qquad (۲D)$$

برای تعیین یک کران بالا برای $|f(x) - P(x)|$ باید کران بالایی برای مشتق دوم تابع f به دست آوریم:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}x$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^۲}{۴}\cos\frac{\pi}{۲}x$$

بنابراین

$$|f''(x)| = |-\frac{\pi^۲}{۴}\cos\frac{\pi}{۲}x| \le \frac{\pi^۲}{۴}$$

در نتیجه

$$|f(x) - P(x)| \le |(x - ۰)(x - ۱)| \times \frac{\pi^۲/۴}{۲!} = \frac{\pi^۲}{۸}|x^۲ - x|$$

یعنی کران بالای خطا عبارت است از $\frac{\pi^۲}{۸}|x^۲ - x|$، مقدار این کران بالا برای $x = \frac{۱}{۲}$ برابر است با :

$$\frac{\pi^۲}{۸}|\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}| = \frac{\pi^۲}{۳۲} = ۰/۳۱ \qquad (۲D)$$

که با مقدار واقعی خطا یعنی ۰/۲۱ به مقدار ۰/۱ اختلاف دارد. مقدار خطا و همچنین کران بالای خطا اعدادی بزرگ هستند که بیانگر خوب نبودن تقریب یا نامناسب بودن چند جمله‌ای درجه اول به عنوان یک تقریب تابع $\cos\frac{\pi}{۲}x$ می‌باشد.

مثال ۲۶. فرض کنید $f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}x$. چند جمله‌ای درونیاب f را در نقاط ۰، ۱ و ۲ به دست آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید.

حل: با توجه به نقاط داده شده و ضابطه تابع f جدول تفاضلات زیر را خواهیم داشت :

x_i	$f_i = \sin\frac{\pi}{۲}x_i$	تفاضلات مرتبهٔ اول	تفاضلات مرتبهٔ دوم
۰	۰		
		۱	
۱	۱		-۱
		-۱	
۲	۰		

بنابراین چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از :

$$P(x) = ۰ + (x - ۰)(۱) + (x - ۰)(x - ۱)(-۱) = -x^۲ + ۲x$$

برای تعیین کران بالای خطا باید مشتق سوم تابع $f(x)$ را حساب کنیم.

$$f'(x) = \frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi x}{۲}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^{۲}}{۴}\sin\frac{\pi x}{۲}$$

$$f'''(x) = -\frac{\pi^{۳}}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}$$

$$|f'''(x)| = |-\frac{\pi^{۳}}{۸}\cos\frac{\pi x}{۲}| \leq \frac{\pi^{۳}}{۸} = M$$

لذا

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-۰)(x-۱)(x-۲)| \times \frac{\pi^{۳}/۸}{۳!} = \frac{\pi^{۳}}{۴۸}|x(x-۱)(x-۲)|$$

۴.۳ برونیابی

هرگاه تابع f در نقاط $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ مقادیر معلوم $f_۰, f_۱, \cdots, f_n$ را داشته باشد، در بخش‌های قبل تخمین تابع $f(x)$ را در $x = \bar{x}$ که $\bar{x}$ در فاصله $[x_۰, x_n]$ قرار داشت، مورد بررسی قرار دادیم.با این حال یک سوال طبیعی این است که هرگاه $\bar{x} < x_۰$ و یا $\bar{x} > x_n$، در این صورت مقدار $f(\bar{x})$ را چگونه تخمین بزنیم؟ چون در این حالتها $\bar{x}$ خارج فاصله $[x_۰, x_n]$ قرار دارد، روند تخمین مقدار تابع f را در $\bar{x}$ **برونیابی** می‌نامیم.برای برونیابی می‌توان از همان چند جمله‌ای درونیاب تابع f استفاده نمود.درونیابی و برونیابی دو مفهوم از یک روند می‌باشند.اما درونیابی بیشتر از برونیابی مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا هرگاه رابطه (۱۳) یعنی کران بالای خطا را در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که هرگاه $\bar{x}$ به اندازه کافی به نقاط مرکزی x_iها نزدیک باشد، خطا کمترین مقدار را دارد.برعکس هرگاه $\bar{x}$ خارج فاصله $[x_۰, x_n]$ باشد که در حالت برونیابی چنین وضعی داریم، عاملهای $x_i - \bar{x}$ در رابطه (۱۳) می‌توانند مقادیر بزرگی باشند.بنابراین مقدار خطای چند جمله‌ای $P(x)$ به عنوان تقریب تابع $f(x)$ زیاد خواهد بود، مگر $\bar{x}$ به یکی از نقاط انتهایی فاصلهٔ $[x_۰, x_n]$

بسیار نزدیک باشد. لذا برونیابی نسبت به درونیابی دارای دقت کمتری است و بایستی برونیابی را با احتیاط مورد استفاده قرار داد.

مثال ۲۷. برای تابع جدولی مثال ۱۹ مقادیر $f(۰/۵)$ و $f(۴/۲)$ را تخمین بزنید.

حل: در مثال ۱۹ و مثال ۲۳ چند جمله‌ای درونیاب $f(x)$ به صورت زیر به دست آمد:

$$P(x) = x^{۲} + ۱$$

بنابراین

$$f(۰/۵) \simeq P(۰/۵) = ۱/۲۵$$

$$f(۴/۲) \simeq P(۴/۲) = ۱۸/۶۴$$

استفاده از چند جمله‌ای درونیاب در تمام نقاط درونیابی x_i برای $i = ۰, ۱, \cdots, n$ تنها روند مورد استفاده در برونیابی نیست، بلکه می‌توان از درونیابی خطی نیز استفاده نمود که ذیلاً توضیح داده می‌شود.

هرگاه چند جمله‌ای درونیاب گذرنده از دو نقطه (x_k, y_k) و $(x_{k+۱}, y_{k+۱})$ را بخواهیم به دست آوریم با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن خواهیم داشت:

$$y = y_k + (x - x_k) f[x_k, x_{k+۱}]$$

$$y = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+۱} - x_k}(y_{k+۱} - y_k) \qquad (۱۴)$$

رابطه (۱۴) نشان دهنده خط ماربر دونقطه (x_k, y_k) و $(x_{k+۱}, y_{k+۱})$ می‌باشد.

حال برای برونیابی، هرگاه $\bar{y} = f(\bar{x})$ و $\bar{x} < x_۰$ در این صورت با قرار دادن $k = ۰$ در رابطه (۱۴) داریم:

$$\bar{y} = y_۰ + \frac{\bar{x} - x_۰}{x_۱ - x_۰}(y_۱ - y_۰) \qquad (۱۵)$$

و اگر $\bar{x} > x_n$ با قرار دادن $k = n - ۱$ در رابطه (۱۴) خواهیم داشت :

$$\bar{y} = y_{n-۱} + \frac{\bar{x} - x_{n-۱}}{x_n - x_{n-۱}}(y_n - y_{n-۱}) \qquad (۱۶)$$

بنابراین روابط (۱۵) و (۱۶) می‌توانند برای برونیابی مورد استفاده قرار گیرند.

مثال ۲۸. تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید :

x_i	-۱	۰	۱	۲
y_i	۰	-۱	۲	۹

به کمک روابط (۱۵) و (۱۶) مقادیر $f(-۱/۵)$ و $f(۲/۲)$ را تخمین بزنید.

حل: داریم :

$$x_۰ = -۱, \quad x_۱ = ۰, \quad x_۲ = ۱, \quad x_n = x_۳ = ۲$$

$$y_۰ = ۰, \quad y_۱ = -۱, \quad y_۲ = ۲, \quad y_n = y_۳ = ۹$$

در این صورت برای $\bar{x} = -۱/۵$ از رابطهٔ (۱۵) خواهیم داشت :

$$\bar{y} = ۰ + \frac{-۱/۵ + ۱}{۰ + ۱}(-۱ - ۰) = ۰/۵$$

بنابراین $f(-۱/۵) \simeq ۰/۵$.

و برای $\bar{x} = ۲/۲$ از رابطه (۱۶) داریم :

$$\bar{y} = ۲ + \frac{۲/۲ - ۱}{۲ - ۱}(۹ - ۲) = ۱۰/۴$$

لذا $f(۲/۲) \simeq ۱۰/۴$.

لازم به ذکر است درفصل هشتم روشی به نام تقریب‌حداقل مربعات معرفی خواهد شد که برای برونیابی نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

مجموعه مسائل فصل سوم

۱- هرگاه $x_0, x_1, \cdots, x_n$ نقاط درونیابی و $f_0, f_1, \cdots, f_n$ مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چند جمله‌ای $P(x)$، حداکثر از درجه n، وجود دارد به طوری که :

$$P(x_i) = f_i, \qquad i = ۰, ۱, \cdots, n$$

۲- چند جمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

جواب .

$$L_0(x) = -\frac{۱}{۸}(x^۳ - ۷x^۲ + ۱۴x - ۸) \quad , L_1(x) = \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۶x^۲ + ۸x)$$
$$L_2(x) = -\frac{۱}{۴}(x^۳ - ۵x^۲ + ۴x) \quad , L_3(x) = \frac{۱}{۲۴}(x^۳ - ۳x^۲ + ۲x)$$

۳- چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مساله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از $f(۳)$ به دست آورید.

جواب. $P(x) = x^۳ - ۲x + ۳ \quad , \quad f(۳) \simeq ۲۴$

۴- برای تابع جدولی زیر تقریبی از $f(۰٫۶)$ به دست آورید.

x_i	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۷	۰٫۸
f_i	−۰٫۹۱۶۲۹۱	−۰٫۶۹۳۱۴۷	−۰٫۳۵۶۶۷۵	−۰٫۲۲۳۱۴۴

جواب . $f(۰٫۶) \simeq -۰٫۵۰۹۹۷۵$

۵- با استفاده از چند جمله‌ایهای لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

جواب. $P(x) = \frac{۱}{۱۲}(-x^۳ + ۹x^۲ - ۸x + ۱۲)$

۶- برای تابع جدولی مساله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

الف. $f[۲, ۴]$ ب. $f[۱, ۲, ۴]$ پ. $f[۰, ۱, ۲]$

ت. $f[۰, ۱, ۲, ۴]$

جواب. الف. $\frac{۳}{۲}$ ب. $\frac{۱}{۶}$ پ. $\frac{۱}{۲}$ ت. $-\frac{۱}{۱۲}$

۷- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ایهای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۴ و ۵ را به دست آورید.

۸- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۱-	۱	۲
f_i	۳-	۰	۴

جواب. $P(x) = \frac{۱}{۶}(۵x^۲ + ۹x - ۱۴)$

۹- به کمک فرمولهای پیشرو و پسرو نیوتن تقریبهایی از $f(۱/۱)$ و $f(۲)$ برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰/۷۶۵۱۹۷۷	۰/۶۲۰۰۸۶۰	۰/۴۵۵۴۰۲۲	۰/۲۸۱۸۱۸۶	۰/۱۱۰۳۶۳۲

جواب. $f(۱/۱) \simeq ۰/۷۱۹۶۴۸۰$ و $f(۲) \simeq ۰/۲۲۳۸۷۵۵$

۱۰- به کمک شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب، چند جمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۵ و ۸ را به دست آورید.

۱۱- برای تابع جدولی مساله ۲ مقادیر $f(۰/۵)$ و $f(۴/۳)$ را تخمین بزنید.

جواب. $f(۰/۵) \simeq ۲/۱۲۵$ و $f(۴/۳) \simeq ۷۳/۹۰۷$

۱۲- به کمک چند جمله‌ای درونیاب به دست آمده در مساله ۸ برای $f(۲/۴)$ و $f(۰)$ مقادیری به دست آورید.

جواب. $f(۲/۴) \simeq ۶/۰۶۷$ و $f(۰) \simeq -۲/۳۳۳$

۱۳- مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

۱۴- با به دست آوردن یک چند جمله‌ای درجه چهار که تابع جدولی زیر را درونیابی می‌کند مقادیر $f(۵)$، $f(۶)$ و $f(۷)$ را پیشگویی (برونیابی) کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	-۱	۱	-۱	۱

جواب. ۳۱، ۱۲۹، ۳۵۱

۱۵- مانند مساله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر $f(۵)$، $f(۶)$ و $f(۷)$ را پیشگویی کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰	۱	۰	۰

جواب. ۱۰، ۴۵، ۱۲۶

فصل چهارم

مشتق‌گیری و انتگرالگیری عددی

۱.۴ مشتق‌گیری عددی

کاربرد مشتق در ریاضیات کاربردی فراوان است و در حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد. معمولاً برای تابعی که دارای ضابطه معلوم باشد، مشتق آن را با روشهای حساب دیفرانسیل می‌توانیم به دست آوریم. اما هرگاه ضابطه تابع پیچیده و یا تابع تنها به صورت یک جدول معلوم باشد، برای مشتق گیری بایستی به روشهای عددی روی آورد. در این قسمت بعضی از روشهای مشتق گیری عددی یک تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دستورهای مشتق‌گیری عددی را می‌توان با مشتق‌گرفتن از چند جمله‌ای درونیاب به دست آورد. هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f باشد، در این صورت مشتقهای $f'(x)$، $f''(x)$ و ... را به کمک $P'(x)$، $P''(x)$ و ... به دست می‌آوریم. البته باید متذکر شد که مشتق‌گیری عددی بر اساس چند جمله‌ای درونیاب یک عمل ناپایدار است، یعنی نمی‌توانیم دقت خوبی را برای جواب انتظار داشته باشیم، زیرا خطای حاصل از مشتق‌گیری یعنی $f'(x) - P'(x)$ ممکن است خیلی بزرگ باشد.

۱.۱.۴ دستورهای مشتق‌گیری بر اساس چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه تابع f در نقاط متساوی‌الفاصله $j = ۰, ۱, \cdots, n$ ، x_j داده شده باشد، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_i, x_{i+۱}, \cdots, x_{i+k}$ به کمک دستور تفاضل پیشرو نیوتن عبارتست از :

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = f_i + s\Delta f_i + \frac{s(s-۱)}{۲!}\Delta^۲ f_i + \frac{s(s-۱)(s-۲)}{۳!}\Delta^۳ f_i + \cdots \\ + \frac{s(s-۱)\cdots(s-k+۱)}{k!}\Delta^k f_i \qquad (۱) \end{aligned}}$$

که در آن $x_{i+۱} - x_i = h$ و $x = x_i + sh$ برای $i = ۰, ۱, \cdots, n-۱$. چون $P(x)$ بر حسب s بیان شده است، بنابراین

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{ds}.\frac{ds}{dx} \qquad (۲)$$

و چون از $x = x_i + sh$ داریم $dx = hds$، لذا

$$\frac{ds}{dx} = \frac{۱}{h} \qquad (۳)$$

بنابراین با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۳) و مشتق‌گیری از (۱) خواهیم داشت :

$$f'(x) \simeq \frac{۱}{h}[\Delta f_i + (s - \frac{۱}{۲})\Delta^۲ f_i + \frac{۳s^۲ - ۶s + ۲}{۶}\Delta^۳ f_i + \cdots] \qquad (۴)$$

به طور مشابه برای مشتق مرتبه دوم داریم :

$$f''(x) = \frac{d^۲ f(x)}{dx^۲} \simeq \frac{d^۲ P(x)}{dx^۲} \simeq \frac{۱}{h^۲}\frac{d^۲ P(x)}{ds^۲} = \frac{۱}{h^۲}[\Delta^۲ f_i + (s-۱)\Delta^۳ f_i + \cdots] \qquad (۵)$$

علی الخصوص هرگاه $s = ۰$ برای مشتقات f در نقاط جدولی x_i دستورهای زیر را خواهیم داشت :

$$f'(x_i) = f'_i \simeq \frac{۱}{h}[\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i + \frac{۱}{۳}\Delta^۳ f_i - \cdots] \qquad (۶)$$

و

$$f''(x_i) = f_i'' \simeq \frac{۱}{h^۲}[\Delta^۲ f_i - \Delta^۳ f_i + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴ f_i - \cdots] \qquad (۷)$$

معمولاً برای محاسبه تقریبی از f_i' و f_i'' یک یا چند جمله از عبارات سمت راست (۶) و (۷) انتخاب می‌شوند. مثلاً

$$f_i' \simeq \frac{۱}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h} \qquad (۸)$$

یا

$$f_i' \simeq \frac{۱}{h}[\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i] = \frac{۲f_{i+۱} - \frac{۱}{۲}f_{i+۲} - \frac{۳}{۲}f_i}{h} \qquad (۹)$$

به طور مشابه به کمک رابطه (۷) یک تقریب برای f_i'' به صورت زیر است :

$$f_i'' \simeq \frac{۱}{h^۲}\Delta^۲ f_i = \frac{f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + f_i}{h^۲} \qquad (۱۰)$$

همچنین با قرار دادن $s = \frac{۱}{۲}$ در رابطه (۴) دستور زیر برای نقاط میانی x_iها به دست می‌آید :

$$f'(x_i + \frac{h}{۲}) = f'_{i+\frac{۱}{۲}} \simeq \frac{۱}{h}[\Delta f_i - \frac{۱}{۲۴}\Delta^۳ f_i + \frac{۱}{۴۸}\Delta^۴ f_i - \cdots] \qquad (۱۱)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f'(x_i + \frac{h}{۲}) \simeq \frac{۱}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h} \qquad (۱۲)$$

به طور مشابه با قرار دادن $s = ۱$ در دستور مشتق‌گیری (۵) داریم :

$$f''(x_i + h) = f''_{i+۱} \simeq \frac{۱}{h^۲}[\Delta^۲ f_i - \frac{۱}{۱۲}\Delta^۴ f_i + \cdots] \qquad (۱۳)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \qquad (14)$$

مثال ۱. مقدار f'_i را برای $i = 0, 1, 2, 3$ برای تابع جدولی زیر با استفاده از فرمول (۸) به دست آورید.

x_i	۰٫۱	۰٫۱۵	۰٫۲	۰٫۲۵	۰٫۳
f_i	۱٫۱۰۵۱۷	۱٫۱۶۱۸۳	۱٫۲۲۱۴۰	۱٫۲۸۴۰۳	۱٫۳۴۹۸۶

حل: جدول تفاضلات تابع جدولی فوق به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷		
		۰٫۰۵۶۶۶	
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۰٫۰۰۲۹۱
		۰٫۰۵۹۵۷	
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰		۰٫۰۰۳۰۶
		۰٫۰۶۲۶۳	
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۰٫۰۰۳۲۰
		۰٫۰۶۵۸۳	
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۶		

با توجه به فرمول (۸) و اینکه $h = 0.05$ خواهیم داشت :

i	$f'_i \simeq \frac{1}{h}\Delta f_i$
۰	۱٫۱۳۳۲
۱	۱٫۱۹۱۴
۲	۱٫۲۵۲۶
۳	۱٫۳۱۶۶

مثال ۲. برای تابع جدولی مثال ۱ مقدار f'_i را برای $i = ۰, ۱, ۲$ با استفاده از فرمول (۹) به دست آورید.

حل:

i	$f'_i \simeq \frac{1}{h}(\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i)$
۰	۱٫۱۰۴
۱	۱٫۱۶۰۸
۲	۱٫۲۲۰۶

توجه: مقادیر f_i در مثال ۱ مربوط به مقادیر تابع $f(x) = e^x$ هستند که مشتق آن با خودش برابر است.لذا بایستی مقادیر جدولهای مثال ۱ و ۲ با مقدار تابع یعنی f_iها برابر باشند که نیستند.و این مطلب از همان ناپایدار بودن و توام با خطای زیاد بودن مشتق‌گیری عددی حاصل می‌شود.البته همانگونه که جدول مثال ۲ نشان می‌دهد، این مقادیر بهتر از مقادیر جدول مثال ۱ هستند.

مثال ۳. مقدار $f''_0 = f''(۰٫۱)$ و $f''_1 = f''(۰٫۱۵)$ را برای تابع جدولی مثال ۱ به کمک فرمول (۱۰) به دست آورید.

حل:

$$f''_0 \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0 = ۱٫۱۶۴$$
$$f''_1 = f''(۰٫۱۵) \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_1 = ۱٫۲۲۴$$

مثال ۴. به کمک فرمول (۱۲) تقریبهایی از $f'(x_i+\frac{h}{2})$ را برای $i=0,1,2,3$ به دست آورید.

حل: با توجه به فرمول (۱۲) این مقادیر همان مقادیر جدول مثال ۱ می‌باشند.

۲.۱.۴ دستورهای مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور

به کمک بسط تیلور یک تابع می‌توان بعضی از دستورهای قسمت قبل و دستورهای دیگری را برای مشتق‌گیری به دست آورد. فرض کنید داریم $x_{i+1}=x_i+h$، لذا خواهیم داشت :

$$f(x_{i+1})=f(x_i+h)=f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\cdots \tag{15}$$

همچنین هرگاه $x_{i-1}=x_i-h$، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(x_{i-1})=f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f'''(x_i)+\cdots \tag{16}$$

بنابراین از رابطه (۱۵) می‌توانیم بنویسیم :

$$f'(x_i)\simeq\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h} \tag{17}$$

رابطه (۱۷) همان رابطه (۸) می‌باشد. به طور مشابه از رابطه (۱۶) می‌توانیم بنویسیم :

$$f'(x_i)\simeq\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}=\frac{f_i-f_{i-1}}{h} \tag{18}$$

توجه: برای محاسبه $f'(x_0)$ از رابطه (۱۷) و برای محاسبه $f'(x_n)$ از رابطه (۱۸) استفاده می‌کنیم.

هرگاه رابطهٔ (۱۶) را جمله به جمله از رابطهٔ (۱۵) کم نموده و جملات اضافی را حذف کنیم خواهیم داشت :

$$f'(x_i)\simeq\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h} \tag{19}$$

همچنین هرگاه جملات دو رابطه (۱۵) و (۱۶) را با هم جمع کنیم، تقریب زیر برای $f''(x_i)$ به دست می‌آید.که همان رابطه (۱۰) می‌باشد.(با حذف جملات اضافی)

$$f''(x_i) \simeq \frac{f(x_{i-۱}) - ۲f(x_i) + f(x_{i+۱})}{h^۲} = \frac{f_{i-۱} - ۲f_i + f_{i+۱}}{h^۲} \qquad (۲۰)$$

با بحثی مشابه می‌توان رابطه زیر را برای مشتق مرتبه سوم f در نقطه x_i به دست آورد.

$$f'''(x_i) \simeq \frac{f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + ۲f_{i-۱} - f_{i-۲}}{۲h^۳} \qquad (۲۱)$$

مثال ۵. تابع جدولی زیر مفروض است، مقادیر $f'_۰$، $f'_۲$، $f'_۱$ و $f''_۲$ را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۰	۰٫۳۷۵	۰٫۹۷۱	۱٫۵۱۱

حل: از فرمول (۱۷) داریم؛ ($h = ۱$)

$$f'_۰ = f'(x_۰) = f'(۰) \simeq \frac{f_۱ - f_۰}{h} = \frac{۰٫۳۷۵ - ۰}{۱} = ۰٫۳۷۵$$

$$f'_۲ = f'(x_۲) = f'(۲) \simeq \frac{f_۳ - f_۲}{h} = \frac{۱٫۵۱۱ - ۰٫۹۷۱}{۱} = ۰٫۵۴۰$$

همچنین برای $f'_۲$ از فرمول (۱۸) داریم :

$$f'_۲ \simeq \frac{f_۲ - f_۱}{h} = \frac{۰٫۹۷۱ - ۰٫۳۷۵}{۱} = ۰٫۵۹۶$$

و از فرمول (۱۹) برای $f'_۲$ خواهیم داشت :

$$f'_۲ \simeq \frac{f_۳ - f_۱}{۲h} = \frac{۱٫۵۱۱ - ۰٫۳۷۵}{۲} = \frac{۱٫۱۳۶}{۲} = ۰٫۵۶۸$$

و از رابطه (۲۰) برای $f''_۲$ داریم:

$$f''_۲ = f''(x_۲) \simeq \frac{f_۱ - ۲f_۲ + f_۳}{h^۲} = \frac{۰٫۳۷۵ - ۱٫۹۴۲ + ۱٫۵۱۱}{۱} = -۰٫۰۵۶$$

۲.۴ خطای مشتق‌گیری عددی

به منظور به دست آوردن خطای فرمولهای مختلفی که در بخش‌های قبل برای $f'(x)$ حاصل می‌شود از بسط تیلور استفاده می‌کنیم.به عنوان مثال فرمول (۱۷) را در نظر بگیرید که از رابطه (۱۵) به دست آمده است، هرگاه جملات را به طور کامل بنویسیم خواهیم داشت :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} = f'_i + \frac{h}{2}f''_i + \frac{h^2}{6}f'''_i + \cdots \qquad (۲۲)$$

در نتیجه :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - f'_i = \frac{h}{2}f''_i + \frac{h^2}{6}f'''_i + \cdots \qquad (۲۳)$$

لذا مقدار سمت راست در رابطه (۲۳) خطای $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ را به عنوان تقریبی از f'_i بیان می‌کند.با توجه به این که h کوچک اختیار می‌شود، جمله غالب در سمت راست عبارت (۲۳)، $\frac{h}{2}f''_i$ است، بنابراین خطای رابطه (۱۷) را به منظور تقریب f'_i به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - f'_i \simeq \frac{h}{2}f''_i \qquad (۲۴)$$

چون توان h در عبارت (۲۴) یک می‌باشد، اصطلاحاً می‌گوییم خطا **متناسب** با h است و می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} - f'_i = O(h)$$

مثال ۶. نشان دهید خطای عبارت (۱۲) به منظور تقریب $f'(x_i + \frac{h}{2})$ متناسب با h^2 است، یعنی نشان دهید :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1}-f_i}{h} = O(h^2)$$

حل: بسط $f'(x_i+\frac{h}{۲})$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f'(x_i+\frac{h}{۲}) = f'_i + \frac{h}{۲}f''_i + \frac{(\frac{h}{۲})^۲}{۲!}f'''_i + \cdots$$

$$f'(x_i+\frac{h}{۲}) = f'_i + \frac{h}{۲}f''_i + \frac{h^۲}{۸}f'''_i + \cdots \qquad (۲۵)$$

هرگاه جملات عبارت (۲۲) را از عبارت (۲۵) کم کنیم، خواهیم داشت :

$$f'(x_i+\frac{h}{۲}) - \frac{f_{i+۱}-f_i}{h} = \frac{h^۲}{۸}f'''_i - \frac{h^۲}{۶}f'''_i + \cdots = -\frac{۱}{۲۴}h^۲f'''_i$$

بنابراین

$$f'(x_i+\frac{h}{۲}) - \frac{f_{i+۱}-f_i}{h} = O(h^۲)$$

توجه: می‌دانیم $\frac{f_{i+۱}-f_i}{h}$ هم به عنوان تقریبی از $f'(x_i)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد و هم به عنوان تقریب $f'(x_i+\frac{h}{۲})$. اما همانگونه که مثالهای ۱ و ۲ نشان می‌دهند، این عبارت تقریب بهتری برای $f'(x_i+\frac{h}{۲})$ می‌باشد و عبارتهای خطا نیز این مطلب را تایید می‌کنند، زیرا هر چه توان h در عبارت خطا بیشتر باشد خطا کمتر است. از اینکه با کوچکتر شدن h، خطا کمتر می‌شود.

توضیحی در مورد ناپایداری مشتق‌گیری عددی

در حالت کلی خطای فرمولهای مشتق‌گیری عددی به صورت $O(h^p)$ است که در آن p بستگی به تعداد جملاتی دارد که برای تقریب مشتق مورد نظر استفاده می‌شود ظاهراً هر چه p بزرگتر باشد خطا نیز کمتر خواهد بود، اما در عمل به هنگام کوچک بودن مقدار h مشکلاتی به وجود می‌آ... عنوان مثال کسر زیر را به عنوان تقریب f'_i در نظر بگیرید

$$\frac{f_{i+۱}-f_i}{h} \qquad (۲۶)$$

که نشان دادیم، خطای آن متناسب با h است.در ظاهر برای کم بودن خطا، h را بایستی کوچک اختیار کنیم.اما کوچک بودن h به معنی نزدیک بودن f_i و $f_{i+۱}$ است، بنابرین $f_{i+۱}-f_i$ می‌تواند

توام با خطای زیاد باشد (مسأله ۱۱ فصل اول را ببینید) و چون f_i − $f_{i+۱}$ بر مقدار کوچک h تقسیم می‌شود و یا در واقع در مقدار بزرگ $\frac{۱}{h}$ ضرب می‌شود، خطای محاسبه کسر زیاد خواهد بود.خلاصه اینکه هرگاه h خیلی کوچک باشد، خطای محاسبه $\frac{f_{i+۱}-f_i}{h}$ زیاد خواهد بود.بنابراین برای کم بودن خطا از طرفی h باید خیلی کوچک اختیار شود و از طرف دیگر نباید خیلی کوچک اختیار شود.لذا برای انتخاب h در تنگنا قرار می‌گیریم و انتخاب بهترین h در عمل امکانپذیر نیست.

۳.۴ انتگرال‌گیری عددی

برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ هرگاه تابع اولیه f موجود نباشد و یا f به صورت جدولی داده شده باشد.از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود.واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ که محصور است به محور xها، خطوط $x = a$ و $x = b$ تعبیر کرد و با تقسیم فاصله $[a, b]$ به چند زیر فاصله و جمع کردن مساحتهای مربوط به این زیر فاصله‌ها مقدار انتگرال را محاسبه کرد.

فرض کنید $[a, b]$ به n قسمت مساوی به صورت زیر تقسیم شود :

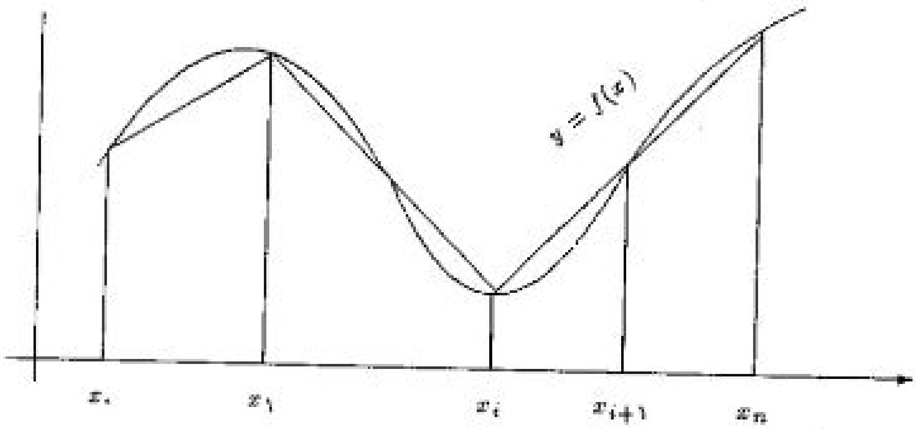
$$[x_i, x_{i+۱}] \quad , \quad i = ۰, ۱, \cdots, n-۱$$

که در آن

$$x_{i+۱} - x_i = h \quad , \quad i = ۰, ۱, \cdots, n-۱$$

لذا $$h = \frac{b-a}{n}$$

۱.۳.۴ قاعده ذوزنقه‌ای



در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \qquad (۲۷)}$$

رابطه (۲۷) مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده‌های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h می‌باشد.

بنابراین برای پیدا کردن تقریبی از $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots +$$
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$
$$\simeq \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$
$$= \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n]$$

بنابراین با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_a^b f(x)dx$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n] \qquad (۲۸)}$$

توجه: $T(h)$ به معنی مقدار انتگرال با استفاده از روش ذوزنقه‌ای (Trapezoid) می‌باشد که هر زیر فاصله دارای طول h می‌باشد.

برنامه کامپیوتری روش ذوزنقه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$.

این برنامه مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش ذوزنقه‌ای محاسبه می‌کند.مقادیر a، b و همچنین تعداد زیر فاصله‌ها، n، به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند.با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای محاسبه انتگرال توابع مختلف به روش ذوزنقه‌ای مورد استفاده قرار داد.خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

```
c
c       Trapezoid Integration
c
        F(x)= exp(-x**2)
        read(*,*) a,b.n
        s = (F(a) + F(b)) / 2.
        h=(b-a)/n
        do 10 i=1,n-1
        s = s + F(a+i*h)
10      continue
        s = s * h
        write(*,*) "INTEGRAL = " , s
        end
```

مثال ۷. تقریبهایی از $\int_{۰/۱}^{۰/۲} e^x dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = ۰/۲, ۰/۱, ۰/۰۵$ به دست آورید.

حل: داریم $a = ۰/۱$، $b = ۰/۳$ و $f(x) = e^x$، لذا

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}[f(۰/۱) + f(۰/۳)] = ۰/۱[۱/۱۰۵۱۷ + ۱/۳۴۹۸۶] = ۰/۲۴۵۵۰$$

$$T(۰/۱) = \frac{۰/۱}{۲}[f(۰/۱) + ۲f(۰/۲) + f(۰/۳)] = ۰/۰۵[۱/۱۰۵۱۷ + ۲(۱/۲۲۱۴۰)$$
$$+ ۱/۳۴۹۸۶] = ۰/۲۴۴۸۹$$

$$T(۰/۰۵) = \frac{۰/۰۵}{۲}[f(۰/۱) + ۲(f(۰/۱۵) + f(۰/۲) + f(۰/۲۵)) + f(۰/۳)]$$
$$= ۰/۰۲۵[۱/۱۰۵۱۷ + ۲(۱/۱۶۱۸۳ + ۱/۲۲۱۴۰ + ۱/۲۸۴۰۳)$$
$$+ ۱/۳۴۹۸۶] = ۰/۲۴۴۷۴$$

مثال ۸. با استفاده از مقادیر جدول زیر تقریبی از $\int_۰^۱ f(x)dx$ حساب کنید.

x_i	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f_i	۱	۱/۲۲۱۴	۱/۴۹۱۸	۱/۸۲۲۱	۲/۲۲۵۵	۲/۷۱۸۳

حل: با گرفتن $h = ۰/۲$ داریم :

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}(f(۰) + ۲(f(۰/۲) + f(۰/۴) + f(۰/۶) + f(۰/۸)) + f(۱))$$
$$= ۱/۷۲۳۹۹$$

۲.۳.۴ قاعده سیمپسون

در قاعده ذوزنقه‌ای برای تقریب $\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)dx$ یک چند جمله‌ای درجه یک (یک خط) را جایگزین تابع $f(x)$ می‌کنیم که این عمل رابطه (۲۸) را نتیجه می‌دهد.اما در روش سیمپسون یک چند جمله‌ای درجه دوم را جایگزین تابع f در فاصله $[x_i, x_{i+۲}]$ می‌کنیم و از آن تقریب زیر را خواهیم داشت :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+۲}} f(x)dx \simeq \frac{h}{۳}(f_i + ۴f_{i+۱} + f_{i+۲}) \qquad (۲۹)}$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمپسون در سراسر فاصله $[x_0, x_n]$ چون رابطه (۲۹) تقریبی برای فاص $[x_i, x_{i+2}]$ است، لذا باید n زوج باشد، یعنی تعداد نقاط فرد باشد تا بتوان (۲۹) را به کار برد با فرض زوج بودن داریم:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\ &\simeq \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &+ \cdots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)\end{aligned}$$

بنابراین هرگاه $S(h)$ نشان‌دهنده تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش سیمپسون باشد که هر زیر فاصله دارای طول است، خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq S(h) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

برنامه کامپیوتری روش سیمپسون برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$.

این برنامه مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش سیمپسون محاسبه می‌کند. مقادیر b و همچنین نصف تعداد زیر فاصله‌ها، n، به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای محاسبه انتگرال توابع مختلف به روش سیمپسون مورد استفاده قرا داد. خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

(دقت کنید که برنامه طوری نوشته است که تعداد زیر فاصله‌ها به صورت $2n$ درنظر گرفته می‌شود.)

```
c
c    Simpson's Method
c
```

```
      F(x)= exp(-x**2)
      read(*,*) a,b,n
      s = 0.
      h = (b-a) / n
      h2 = h / 2.
      h3 = F(a+h2)
      do 10 i=1,n-1
      s = s + F(a+i*h)
      h3 = h3 + F(a+i*h+h2)
10    continue
      s = h/6. * (F(a) + 4 * h3 + 2 * s + F(b))
      write(*,*) "INTEGRAL = " , s
      end
```

مثال ۹: تقریبهایی از $\int_{۱}^{۱/۳} \sqrt{x}dx$ را به روش سیمپسون و به ازای $h = ۰/۱۵$ و $h = ۰/۰۵$ به دست آورید.

حل: داریم $f(x) = \sqrt{x}$، لذا

$$S(۰/۱۵) = \frac{۰/۱۵}{۳}[۱ + ۴(۱/۰۷۲۳۸) + ۱/۱۴۰۱۸] = ۰/۳۲۱۴۸۵$$

و

$$S(۰/۰۵) = \frac{۰/۰۵}{۳}[۱ + ۴(۱/۰۲۴۷۰) + ۲(۱/۰۴۸۸۱) + ۴(۱/۰۷۲۳۸) + ۲(۱/۰۹۵۴۵) + ۴(۱/۱۱۸۰۳) + ۱/۱۴۰۱۸] = ۰/۳۲۱۴۹$$

۳.۳.۴ قاعده‌های دیگر انتگرال‌گیری

در فرمول قاعده‌ذوزنقه‌ای داریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}f_i + \frac{h}{2}f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} A_k f_k$$

که در آن $A_i = A_{i+1} = \frac{h}{2}$.

همچنین از قاعده سیمپسون نتیجه می‌شود که :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}f_i + \frac{4h}{3}f_{i+1} + \frac{h}{3}f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} A_k f_k$$

لذا در حالت کلی قواعدی که داریم به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n} A_k f_k + E \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E \end{aligned} \qquad (30)$$

در رابطه (۳۰) آنچه می‌تواند مجهول باشد نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ و ضرائب $A_0, A_1, \cdots, A_n$ است، که ذیلاً دو روش را برای محاسبه آنها ارائه می‌کنیم. در رابطه (۳۰)، E مقدار خطای $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ است.

روش نیوتن- کاتس

در این روش نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ معلوم فرض می‌شوند، مثلاً متساوی‌الفاصله و به صورت زیر :

$$x_{i+1} = x_i + h, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

بنابراین در رابطه (۳۰) مجهولات عبارتند از $n+1$ ضریب $A_0, A_1, \cdots, A_n$.

برای به دست آوردن این ضرائب فرض می‌کنیم در رابطه (۳۰) برای توابع زیر مقدار خطا صفر است:

$$f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^n$$

یعنی ضرائب مجهول A_k را طوری پیدا می‌کنیم که خطای عبارت $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ برای چند جمله‌ایهای تا درجه n صفر باشد.هرگاه برای راحتی قرار دهیم $x_0 = 0$ در این صورت فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f_k + E \tag{۳۱}$$

که در آن $x_k = kh$، یعنی

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h$$

برای به دست آوردن ضرائب A_0 تا A_3 برای محاسبه انتگرال (۳۱) مقدار E را برای توابع $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ برابر صفر قرار می‌دهیم.

هرگاه $f(x) = 1$ در این صورت

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} dx = 3h$$

از طرفی برای $E = 0$ مقدار سمت راست رابطه (۳۱) عبارت است از :

$$\sum_{k=0}^{3} A_k f_k = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{3} A_k = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

بنابراین برای $f(x) = 1$ معادله زیر نتیجه می‌شود :

$$3h = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \tag{۳۲}$$

به طور مشابه برای $f(x) = x$ معادله زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{9h^2}{2} = hA_1 + 2hA_2 + 3hA_3 \tag{۳۳}$$

زیرا

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} x dx = \frac{1}{2}(9h^2)$$

و

$$\sum_{k=0}^{3} A_k f_k = \sum_{k=0}^{3} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{3} A_k x_k = 0 + A_1 h + 2hA_2 + 3hA_3$$

به طور مشابه برای توابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$f(x) = x^2 \Longrightarrow \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^2 A_1 + 4h^2 A_2 + 9h^2 A_3 \qquad (34)$$

$$f(x) = x^3 \Longrightarrow \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3 A_1 + 8h^3 A_2 + 27h^3 A_3 \qquad (35)$$

پس از ساده کردن معادلات (۳۲) تا (۳۵) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 3h \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = \frac{9h}{2} \\ A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 9h \\ A_1 + 8A_2 + 27A_3 = \frac{81h}{4} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه خواهیم داشت :

$$A_0 = \frac{3h}{8}, \qquad A_1 = \frac{9h}{8}, \qquad A_2 = \frac{9h}{8}, \qquad A_3 = \frac{3h}{8}$$

بنابراین فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن‌ـکاتس را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\int_0^{3h} f(x)dx \simeq \frac{3h}{8}(f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h))$$

و با تغییر متغیر $X = x_0 + x$ فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر خواهد بود :

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(X)dX \simeq \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad (36)}$$

روش فوق‌الذکر به روش **ضرائب مجهول** نیز معروف است.

مثال ۱۰. با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن‌ـکاتس مقدار انتگرال $\int_0^1 xe^x dx$ را به دست

آورید.

حل: چون فرمول چهار نقطه‌ای است پس $n = ۳$ و از آن $h = \frac{۱ - ۰}{۳} = \frac{۱}{۳}$ لذا

$$x_۰ = ۰, \quad x_۱ = \frac{۱}{۳}, \quad x_۲ = \frac{۲}{۳}, \quad x_۳ = ۱$$

بنابراین

$$\int_۰^۱ xe^x dx \simeq \frac{۱}{۸}[f(۰) + ۳f(\frac{۱}{۳}) + ۳f(\frac{۲}{۳}) + f(۱)]$$
$$= \frac{۱}{۸}[۰ + e^{\frac{۱}{۳}} + ۲e^{\frac{۲}{۳}} + e^۱] = ۱/۰۰۱۱۷$$

روش گاوس

در روش گاوس نقاط و ضرائب در رابطه (۳۰) مجهول فرض می‌شوند، پس در فرمول

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=۰}^{n} A_k f(x_k) + E$$

$(n + ۱)$ نقطه $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ و $(n + ۱)$ ضریب $A_۰, A_۱, \cdots, A_n$ مجهول هستند.به منظور به دست آوردن این $۲n + ۲$ مجهول برای توابع $f(x) = ۱, x, x^۲, \cdots, x^{۲n+۱}$ قرار می‌دهیم $E = ۰$.

بنابراین با این عمل $\sum_{k=۰}^{n} A_k f(x_k)$ برای انتگرال‌گیری چند جمله‌ایهای تا درجه $۲n + ۱$ دقیق می‌باشد.

نکته: برای آشنایی با روش‌های گاوس در حالت کلی از قبیل گاوس-لژاندر، گاوس-چبیشف و ... به یکی از کتب آنالیز عددی پیشرفته مراجعه کنید، در این بخش صرفاً بعضی از فرمولهای گاوس-لژاندر معرفی می‌شوند.

توجه: تفاوت اساسی روش گاوس با روشهای قبلی این است که در روشهای قبل تمام فرمولهای بیان شده برای نقاط متساوی‌الفاصله x_k می‌باشند.در حالی که در روش گاوس چنین نیست.همچنین

فرمولهای قاعده گاوس برای فاصله $[-۱,۱]$ به دست می‌آیند.واضح است که فاصله‌های $[a,b]$ و $[-۱,۱]$ را به سادگی می‌توان باتغییر متغیر زیر به هم تبدیل نمود.فرض کنید $x \in [a,b]$ و $u \in [-۱,۱]$ در این صورت هرگاه قرار دهیم :

$$x = \frac{۱}{۲}[(b-a)u + (b+a)]$$

خواهیم داشت :

$$dx = \frac{b-a}{۲}du$$

لذا

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{۲}\int_{-۱}^{۱} g(u)du$$

که در آن

$$g(u) = f(\frac{۱}{۲}((b-a)u + (b+a)))$$

فرمول دونقطه‌ای گاوس

هرگاه فرمول دونقطه‌ای گاوس را برای $\int_{-۱}^{۱} f(x)dx$ بخواهیم به دست آوریم بایستی داشته باشیم :

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx = \sum_{k=۰}^{۱} A_k f(x_k) + E \qquad (۳۷)$$

که در آن برای توابع $f(x) = ۱, x, x^۲, x^۳$ داریم $E = ۰$.

با قرار دادن توابع فوق در رابطه (۳۷) و با $E = ۰$ به دستگاهی با چهار معادله و چهار مجهول می‌رسیم که از آن خواهیم داشت :

$$A_۰ = A_۱ = ۱$$

$$x_۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \qquad x_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\ .$$

لذا فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \quad (۳۸)}$$

برنامه کامپیوتری روش گاوس دو نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$.

این برنامه مقدار انتگرال $\int_0^1 F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش گاوس دو نقطه‌ای محاسبه می‌کند.با تبدیل فاصله $[0, 1]$ به فاصلهٔ $[-1, 1]$ بایستی $\int_{-1}^{1} g(u)du$ محاسبه شود، لذا تابع g در اختیار برنامه قرار داده می‌شود.برای توابع مختلف F می‌توان توابع تبدیل شده g را به دست آورد و در اختیار برنامه قرار داد تا انتگرال مورد نظر محاسبه شود.خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

```
c
c     Gaussian Rule (2-point method)
c
c     for function F(x)= EXP(-x**2)
c
      dimension p(2)
      g(x) = exp(-(x+1) ** 2 / 4.) / 2.
      p(1) =-0.577350269
      p(2) = -p(1)
      s = 0.
      do 10 i = 1,2
         s = s + g(p(i))
10    continue
      write(*,*) "INTEGRAL = " , s
      end
```

مثال ۱۱. برای محاسبه $\int_{۰}^{\pi/۲} \sin t dt$ دستور دو نقطه‌ای گاوس را بکار ببرید.

حل: با تغییر متغیر

$$t = \frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۲}x + \frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi(x+۱)}{۴}$$

نتیجه می‌شود :

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \sin t dt = \frac{\pi}{۴}\int_{-۱}^{۱} \sin \frac{\pi(x+۱)}{۴} dx$$

$$f(x) = \sin \frac{\pi(x+۱)}{۴} \Longrightarrow f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۳۲۵۸۹$$

$$f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۹۴۵۴۱$$

لذا بنا بر رابطه (۳۸) خواهیم داشت :

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \sin t dt \simeq \frac{\pi}{۴}[۰/۳۲۵۸۹ + ۰/۹۴۵۴۱]$$

$$= ۰/۹۹۸۴۸$$

نکته: توجه کنید که در مثال قبل ابتدا فاصلهٔ $[۰,\pi/۲]$ به فاصلهٔ $[-۱,۱]$ تغییر داده شده و سپس از فرمول مربوطه استفاده شده است.

مثال ۱۲ : با استفاده از روش گاوس دو نقطه‌ای مقدار تقریبی انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^۲ x}{x} dx$$

حل . با قرار دادن $x = \frac{u+۳}{۲}$ خواهیم داشت $dx = \frac{۱}{۲}du$، لذا

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^۲ x}{x}dx = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} \frac{\sin^۲(\frac{u+۳}{۲})}{(\frac{u+۳}{۲})}du$$

$$= \int_{-۱}^{۱} \frac{\sin^۲(\frac{u+۳}{۲})}{u+۳}du \simeq f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) + f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

که در آن $f(x)=\dfrac{\sin^{۲}(\frac{x+۳}{۲})}{x+۳}$ لذا

$$f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})=۰{,}۲۶۶۴۷۵۲۳۶ \quad , \quad f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=۰{,}۳۶۱۶۹۱۲۳۱$$

بنابراین :

$$\int_{۱}^{۲}\frac{\sin^{۲}x}{x}dx\simeq ۰{,}۶۲۸۱۶۶۴۶۷$$

فرمول سه نقطه‌ای گاوس

با روش مشابه فرمول دو نقطه‌ای، دستور انتگرالگیری ۳ نقطه‌ای گاوس به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\boxed{\int_{-۱}^{۱}f(x)dx\simeq\frac{۱}{۹}[۵f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}})+۸f(۰)+۵f(\sqrt{\frac{۳}{۵}})] \qquad (۳۹)}$$

توجه:نقاط و ضرائب دستورهای مختلف انتگرالگیری گاوس در جداولی موجود هستند که می‌توان از آنها استفاده نمود.

برنامه کامپیوتری روش گاوس سه نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$.

این برنامه مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱}F(x)dx$ را برای تابع $F(x)=e^{-x^{۲}}$ به روش گاوس دو نقطه‌ای محاسبه می‌کند.با تبدیل فاصله $[۰,۱]$ به فاصلهٔ $[-۱,۱]$ بایستی $\int_{-۱}^{۱}g(u)du$ محاسبه شود، لذا تابع g در اختیار برنامه قرار داده می‌شود.برای توابع مختلف F می‌توان توابع تبدیل شده g را به دست آورد و در اختیار برنامه قرار داد تا انتگرال مورد نظر محاسبه شود.خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

```
c
c       Gaussian Rule (3-point method)
c
c       for function F(x)= EXP(-x**2)
c
        dimension p(3),w(3)
        g(x) = exp(-(x+1) ** 2 / 4.) / 2.
        p(1) =-0.77459667
        p(2) = 0.
        p(3) = -p(1)
        w(1) = 5. / 9.
        w(2) = 8. / 9.
        w(3) = w(1)
        s = 0.
        do 10 i = 1,3
           s = s + w(i) * g(p(i))
10      continue
        write(*,*) "INTEGRAL = " , s
        end
```

مثال ۱۳ : جواب مثال ۱۲ را به کمک دستور سه نقطه‌ای گاوس به دست آورید.

حل: با داده‌های مثال ۱۲ داریم :

$$f(\circ) = \circ/۳۳۱۶۶۵۴۱۶$$

$$f(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = \circ/۳۶۱۴۷۳۲۴۶ \quad , \quad f(\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = \circ/۲۳۹۲۶۴۵۱۲$$

لذا با توجه به فرمول (۳۹) خواهیم داشت :

$$\int_۱^۲ \frac{\sin^۲ x}{x} dx \simeq \frac{۱}{۹}[۵/۶۵۷\circ۱۲۱۱۸] = \circ/۶۲۸۵۵۶۹\circ۲$$

۴.۴ انتگرالهای منفرد

در قسمت‌های قبل محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int_a^b f(x)dx$ مورد بحث قرار گرفت که در آن $f(x)$ در تمام فاصله $[a,b]$ معین و تعریف شده بود.در این قسمت انتگرالهایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

الف. $\int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{x}}dx$

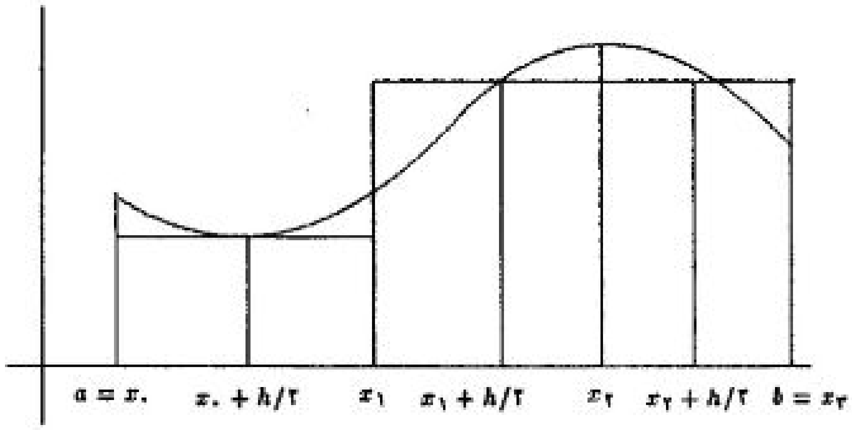
ب. $\int_۰^۱ \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$

پ. $\int_{-۱}^۱ \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$

که در آن توابعی که می‌خواهیم انتگرال آنها را محاسبه کنیم در یک یا هر دو نقطه انتهایی فاصله انتگرالگیری تعریف نشده‌اند.در انتگرال الف تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x=۰$ تعریف نشده است، این نقطه را نقطه **منفرد** یا تکین تابع می‌نامیم.همچنین نقطه $x=۱$ یک نقطه تکین تابع $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ در انتگرال قسمت ب می‌باشد.هر چند انتگرالهای فوق را می‌توان به روشهای تحلیلی به دست آورد اما هر گاه بخواهیم از روشهای عددی برای چنین انتگرالهایی استفاده کنیم، چون روشهایی مانند روش ذوزنقه و سیمپسون از مقادیر تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی فاصله انتگرالگیری استفاده می‌کنند، بنابراین محاسبه انتگرالهای فوق به این روشها میسر نیست، در اینجا تنها یک روش را برای محاسبه چنین انتگرالهایی توضیح می‌دهیم.

۱.۴.۴ قاعده نقطه میانی

برای توضیح این روش، فرض کنید فاصله $[a,b]$ را به صورت زیر به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم، برای محاسبه مساحت زیر نمودار تابع f در فاصله $[x_i, x_{i+۱}]$ مساحت مستطیل به عرض h و طول $f(x_i+\frac{h}{۲})$ را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین در این روش قرار می‌دهیم :

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)dx \simeq hf(x_i + \frac{h}{۲}) \qquad (۴۰)}$$

لذا برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ با استفاده از قاعده نقطه میانی، به روش زیر عمل می‌کنیم :

$$\int_{x_{۰}}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_{۰}}^{x_{۱}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+۱}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-۱}}^{x_n} f(x)dx$$

و با استفاده از فرمول (۴۰) هرگاه $M(h)$ تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش نقطه میانی باشد که هر زیر فاصله دارای طول h است، خواهیم داشت :

$$\int_{x_{۰}}^{x_n} f(x)dx \simeq M(h) = h[f(x_{۰} + \frac{h}{۲}) + \cdots + f(x_i + \frac{h}{۲}) + \cdots + f(x_{n-۱} + \frac{h}{۲})]$$

مثال ۱۴. تقریبی از $\int_{۰}^{۰٫۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $h = ۰٫۰۳$ و $h = ۰٫۰۱$ به روش نقطه میانی به دست آورید.

حل:

$$\int_{۰}^{۰٫۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(۰٫۰۳) = ۰٫۰۳(f(۰٫۰۱۵) + f(۰٫۰۴۵) + f(۰٫۰۷۵))$$

$$= ۰٫۰۳(۸٫۱۶۵۰ + ۴٫۷۱۴۰ + ۳٫۶۵۱۵)$$

$$= ۰٫۴۹۵۹$$

همچنین

$$\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}\simeq M(۰/۰۱)=۰/۰۱[\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۱۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۲۵}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۸۵}}]=۰/۵۳۹۵۸۷$$

توجه: مقدار واقعی انتگرال عبارتست از $\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}=۰/۶$ ، زیرا

$$\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}=[۲\sqrt{x}]_{۰}^{۰/۰۹}=۰/۶$$

لذا خطای $M(۰/۰۳)$ با مقدار واقعی حدود ۰/۱۰۴ و خطای $M(۰/۰۱)$ با مقدار واقعی حدود ۰/۰۶ می‌باشد. بنابراین توصیه می‌شود در چنین انتگرالهایی برای قسمتی که نزدیک نقطه تکین تابع است، h را بسیار کوچک اختیار کنید و برای بقیهٔ فاصله h را یک مقدار بزرگ‌تر در نظر بگیرید.

مثال ۱۵ . انتگرال $\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\int_{۰}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_{۰}^{۰/۰۱}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

انتگرال $\int_{۰}^{۰/۰۱}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $M(۰/۰۰۲)$ و انتگرال $\int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $M(۰/۰۲)$ تقریب بزنید.

حل:

$$\int_{۰}^{۰/۰۱}\frac{dx}{\sqrt{x}}\simeq M(۰/۰۰۲)=۰/۰۰۲[\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۷}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۰۹}}]=۰/۱۷۳۰۳۱$$

همچنین

$$\int_{۰/۰۱}^{۰/۰۹}\frac{dx}{\sqrt{x}}\simeq M(۰/۰۲)=۰/۰۲[\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۴}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۶}}+\frac{۱}{\sqrt{۰/۰۸}}]=۰/۳۹۳۷۸۲$$

لذا

$$\int_{0}^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq 0.173031 + 0.393782 = 0.566813$$

مثال ۱۶. خطای مقدار به دست آمده برای انتگرال $\int_{0}^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ در مثال ۱۵ با مقدار واقعی یعنی ۰٫۶ چقدر است.

حل:

$$\text{خطا} = \text{مقدار واقعی} - \text{مقدار تقریبی}$$

$$= 0.6 - 0.566813 = 0.033187$$

توجه: مقدار خطای به دست آمده در مثال ۱۶ کمتر از خطای مقادیر به دست آمده برای انتگرال در مثال ۱۴ می‌باشد.برای کم کردن خطا h را بایستی کوچکتر گرفت.البته برای hهای کوچکتر محاسبه با دست بسیار طولانی خواهد بود، لذا بایستی از برنامه‌های کامپیوتری استفاده نمود.

تذکر. توجه کنید که روش‌های گاوس از جمله روشهایی هستند که به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله نیاز ندارند، لذا در انتگرالهای منفرد می‌توان از آن فرمولها جهت تعیین مقدار تقریبی انتگرال استفاده نمود.

تعریف ۱.۴. قواعد انتگرالگیری عددی را که نیاز به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله ندارند، فرمولهای باز می‌نامیم. همچنین قواعد انتگرالگیری عددی را که نیاز به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله دارند، فرمولهای بسته می‌نامیم.

۵.۴ خطای روشهای انتگرالگیری

قبل از بیان خطای روشهای انتگرالگیری بیان شده در این فصل، دو قضیه زیر را که در محاسبه خطاها مورداستفاده قرار می‌گیرند، در نظر بگیرید.

قضیه ۱.۴. هرگاه تابع H بر فاصله $[c,d]$ پیوسته و تابع g در این فاصله انتگرالپذیر بوده و تغییر علامت ندهد (یعنی همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد) در این صورت

$$\int_c^d g(x)H(x)dx = H(\gamma)\int_c^d g(x)dx$$

که در آن $\gamma \in [c,d]$.

قضیه ۲.۴. هرگاه تابع H بر فاصله $[c,d]$ پیوسته باشد و

$$\min_{c\le x\le d} H(x) \le \alpha \le \max_{c\le x\le d} H(x)$$

آن گاه $\beta \in [c,d]$ وجود دارد به طوری که

$$H(\beta) = \alpha$$

برای به دست آوردن خطای روشهای انتگرالگیری از چند جمله‌ای درونیاب استفاده می‌کنیم، روند محاسبه خطا را برای روش ذوزنقه به طور کامل شرح داده و خطای سایر روشها را بیان می‌نماییم.

۱.۵.۴ خطای روش ذوزنقه

فرمول قاعده ذوزنقه‌ای را برای محاسبه $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ به وسیله چند جمله‌ای درونیاب f که در نقاط x_i و x_{i+1} با f هم مقدار است، به دست می‌آوریم.در فصل سوم خطای این چند جمله‌ای به صورت زیر بیان شد :

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2!}f''(\eta_x) \qquad , \qquad \eta_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

که در آن $P(x) = f_i + s\Delta f_i$.هرگاه از طرفین رابطه اخیر انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2!}f''(\eta_x)dx \quad (41)$$

هرگاه فرض کنیم $f''(x)$ تابعی پیوسته است، چون برای x در $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$x - x_i \geq 0$$

$$x - x_{i+1} \leq 0$$

لذا هرگاه قرار دهیم $g(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ ، همواره خواهیم داشت :

$$g(x) \leq 0$$

یعنی $g(x)$ بر فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تغییر علامت نمی‌دهد و چون تابع $H(x) = f''(\eta_x)$ نیز پیوسته فرض شده است، بنا بر قضیه ۱.۴ رابطه (۴۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = \frac{f''(\eta_i)}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx \quad (۴۲)$$

که در آن $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$.هرگاه در انتگرال سمت راست عبارت فوق تغییر متغیر $x = x_i + sh$ را انجام دهیم، خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx = -\frac{h^3}{6}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۴۲) خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \qquad (۴۳)$$

در نتیجه برای محاسبه خطای $T(h)$ یعنی محاسبه $ET(h)$، چون

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

خواهیم داشت :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - T(h) = [\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)] + [\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + [\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})] + \cdots + [\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)]$$

و بنابر رابطه (۴۳) مقدار خطا عبارت است از :

$$\begin{aligned} ET(h) &= -\frac{h^3}{12}f''(\eta_0) - \frac{h^3}{12}f''(\eta_1) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\eta_{n-1}) \\ &= -\frac{h^3}{12}[f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})] \qquad (۴۴) \end{aligned}$$

هرگاه قرار دهیم :

$$m = min\{f''(x) : \ a \leq x \leq b\}$$

$$M = max\{f''(x) : \ a \leq x \leq b\}$$

در این صورت بنا به خاصیت ماکسیمم و مینیمم تابع $f''(x)$ داریم :

$$m \leq f''(\eta_i) \leq M \qquad , \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1 \qquad (۴۵)$$

هرگاه n نامساوی در رابطه (۴۵) را با هم جمع کنیم،خواهیم داشت :

$$nm \leq f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1}) \leq nM$$

و از آن

$$m \leq \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n} \leq M$$

هرگاه قرار دهیم $\alpha = \dfrac{f''(\eta_۰) + f''(\eta_۱) + \cdots + f''(\eta_{n-۱})}{n}$ بنابراین چون

$$m \leq \alpha \leq M$$

بنا بر قضیه ۲.۴ یک $\beta \in [a, b]$ هست که

$$f''(\beta) = \alpha$$

یعنی

$$f''(\beta) = \frac{f''(\eta_۰) + \cdots + f''(\eta_{n-۱})}{n}$$

و از آن $\quad f''(\eta_۰) + f''(\eta_۱) + \cdots + f''(\eta_{n-۱}) = nf''(\beta)$

بنابراین رابطه (۴۴) به صورت زیر خواهد بود :

$$ET(h) = -\frac{nh^۳}{۱۲} f''(\beta)$$

و چون $nh = b - a$، لذا خطای انتگرالگیری روش ذوزنقه به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{ET(h) = -\frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ f''(\beta) \qquad (۴۶)}$$

نتیجه ۱.بنا بر رابطه (۴۶) خطای قاعده ذوزنقه‌ای متناسب با $h^۲$ است، بنابراین هرگاه h نصف شود مقدار خطا $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد.

نتیجه ۲.بنا بر رابطه (۴۶) قاعده ذوزنقه‌ای برای چند جمله‌ای‌های تا درجه یک دقیق است زیرا مشتق مرتبه دوم در این توابع صفر است.

توجه: هرگاه $M_۲$ یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی

$$|f''(x)| \leq M_۲ \qquad , \qquad x \in [a, b]$$

در این صورت :

$$\boxed{|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \qquad (47)}$$

نتیجه . نامساوی (۴۷) برای برآورد h، به طوری که خطای $T(h)$ از مقدار معینی بیشتر نباشد به کار می‌رود. مثلاً هرگاه بخواهیم $|ET(h)| \leq \epsilon$ کافی است h را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم :

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \leq \epsilon$$

مثال ۱۷. تقریبی از $\int_0^1 x \sin x dx$ به دست آورید به طوری که خطای آن حداکثر 10^{-2} باشد.

حل: داریم $a = 0$، $b = 1$ و $\epsilon = 10^{-2}$، برای به دست آوردن M_2 چون

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

لذا

$$|f''(x)| = |2\cos x - x\sin x| \leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \leq 2 + 1 = 3$$

پس $M_2 = 3$، بنابراین بایستی h را طوری به دست آوریم که داشته باشیم :

$$\frac{(1-0)}{12} h^2 (3) \leq 10^{-2}$$

و یا

$$\frac{h^2}{4} \leq 10^{-2} \Longrightarrow h \leq 0/2$$

بنابراین قرار می‌دهیم $h = 0/2$ و $T(0/2)$ را حساب کنیم.

$$T(0/2) = \frac{0/2}{2}(0 + 2(0/2\sin 0/2 + 0/4\sin 0/4 + 0/6\sin 0/6 + 0/8\sin 0/8)$$
$$+ \sin 1) = 0/30578$$

۲.۵.۴ خطای سایر روشهای انتگرالگیری

الف.خطای روش سیمپسون .

هرگاه $ES(h)$ خطای روش انتگرالگیری سیمپسون با طول زیر فاصله h باشد با روشی مشابه روش به کار رفته در محاسبه $ET(h)$ می‌توان نشان داد که داریم :

$$\boxed{ES(h) \simeq -\frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴}f^{(۴)}(\eta) \qquad (۴۸)}$$

که در آن $\eta \in [a, b]$.

نتیجه ۱. رابطه (۴۸) نشان می‌دهد که خطای $S(h)$ متناسب با $h^{۴}$ بوده و روش سیمپسون برای چند جمله‌ایهای تا درجه ۳ دقیق است.

نتیجه ۲. چون η مقداری نامعلوم است، لذا هرگاه داشته باشیم

$$|f^{(۴)}(x)| \leq M_{۴} \qquad , \qquad x \in [a, b]$$

بنابراین کران بالای خطای زیر را برای $S(h)$ خواهیم داشت

$$\boxed{|ES(h)| \leq \frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴}M_{۴} \qquad (۴۹)}$$

با استفاده از رابطه (۴۹) می‌توان $S(h)$ را با دقتی که از قبل تعیین می‌شود حساب کرد.مثلاً هرگاه بخواهیم $S(h)$ را چنان به دست آوریم که

$$|ES(h)| \leq \epsilon$$

کافی است h را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{۱۸۰}h^{۴}M_{۴} \leq \epsilon$$

مثال ۱۸. h را طوری به دست آورید که $S(h)$ مقدار $\int_{0}^{\pi/2} x\cos x\,dx$ را با حداکثر خطای 10^{-5} تعیین کند.

حل: داریم $a = 0$، $b = \frac{\pi}{2}$، $\epsilon = 10^{-5}$ و $f(x) = x\cos x$ ، لذا برای تعیین M_4 چون

$$f^{(4)}(x) = 4\sin x + x\cos x$$

برای $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت :

$$|f^{(4)}(x)| = |4\sin x + x\cos x| \le 4|\sin x| + |x||\cos x| \le 4 + \frac{\pi}{2} < 6$$

پس قرار می‌دهیم $M_4 = 6$ و از آن :

$$\frac{b-a}{180}h^4 M_4 = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{180}h^4 \times 6 = \frac{\pi h^4}{60} \le 10^{-5}$$

بنابراین بایستی

$$h \le 0{,}1 \times \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \simeq 0{,}1176$$

لذا چون داریم $nh = b - a = \frac{\pi}{2}$ پس $n = \frac{\pi}{2h}$ و از آن

$$n = \frac{\pi}{2h} \ge \frac{\pi}{2 \times 0{,}1176} = 13{,}3571$$

چون در روش سیمپسون بایستی n زوج باشد، لذا قرار می‌دهیم $n = 14$ و از آن

$$h = \frac{\pi/2}{n} = \frac{\pi}{28} \simeq 0{,}1122$$

که از $0{,}1176$ کمتر است.

ب.خطای قاعده نقطه میانی.

خطای قاعده نقطه میانی را با $EM(h)$ نشان می‌دهیم که برابر است با :

$$\boxed{EM(h) \simeq \frac{(b-a)}{24}h^2 f''(\eta) \qquad (50)}$$

که $\eta \in [a,b]$. هرگاه $M_2 \geq |f''(x)|$ برای $x \in [a,b]$ در این صورت

$$\boxed{|EM(h)| \leq \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2 \qquad (51)}$$

نتیجه. رابطهٔ (۵۱) نشان می‌دهد که خطای $M(h)$ متناسب با h^2 بوده و روش نقطه میانی برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ یک دقیق است.

مجموعه مسائل فصل چهارم

۱- تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید، فاصله $[1, 1/30]$ را به صورت $x = 1/0(0/05)1/30$ جدول بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.

الف. با استفاده از رابطه (۸) مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

ب. با استفاده از رابطه (۹) مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

پ. با استفاده از رابطه (۱۰) یک تقریب برای $f''(1)$ به دست آورید.

جواب. الف. ۰٫۴۹۴ ب. ۰٫۴۹۹۹ پ. ۰٫۲۳۶−.

۲- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای $f'_i, i = 1, 2, \cdots, 5$ به دست آورید.

۳- مساله ۲ را با استفاده از رابطه (۹) حل کنید.

۴- برای تابع مسألهٔ ۱ با استفاده از رابطه (۱۰) مقادیری برای $f''_i, i = 1, 2, \cdots, 5$ به دست آورید.

۵- برای تابع مسألهٔ ۱ با استفاده از رابطه (۱۲) تقریبی برای $f'(1/125)$ به دست آورید.

جواب. ۰٫۴۷۱۴.

۶- انتگرال $\int_1^{1/3} \sqrt{x}dx$ را در نظر بگیرید. مقادیر خواسته شده را با $(5D)$ به دست آورید.

الف. $T(0/3)$ ب. $T(0/15)$ پ. $T(0/1)$ ت. $T(0/05)$

جواب. الف. ۰٫۳۲۱۰۲ ب. ۰٫۳۲۱۳۷ پ. ۰٫۳۲۱۴۳ ت. ۰٫۳۲۱۴۷

۷- با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را با $h = 1$، $h = 0/5$ و $h = 0/25$ با $(4D)$ به دست آورید.

جواب. $T(۱) = ۰/۷۵۰۰$ ، $T(۰/۵) = ۰/۷۰۸۳$ ، $T(۰/۲۵) = ۰/۶۹۷۰$

۸- مقدار $\int_۰^۱ x^۲ dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$ حساب کنید.

جواب. $T(۱) = \frac{۱}{۲}$، $T(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۸}$، $T(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱۱}{۳۲}$

۹- تقریبی از $\int_۰^{\pi/۲} \sin x dx$ را با $T(\frac{\pi}{۸})$ به دست آورید.

جواب. ۰/۹۸۷۱۲.

۱۰- تقریبهایی از $\int_۱^۲ \frac{dx}{x}$ را با $T(۱)$ و $T(\frac{۱}{۲})$ به دست آورید.

جواب. $T(۱) = \frac{۷}{۶}$، $T(\frac{۱}{۲}) = \frac{۶۷}{۶۰}$

۱۱- مقدار انتگرال $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x}$ را با $S(۰/۱)$ به دست آورید.

جواب. ۰/۶۹۳۱.

۱۲- مقدار انتگرال $\int_۰^۱ x^۲ dx$ را با $S(۰/۵)$ به دست آورید.

جواب. ۰/۲۵.

۱۳- مقدار انتگرال $\int_۰^۱ \frac{\sin x}{x} dx$ را با $S(۰/۲۵)$ به دست آورید، (قرار دهید ۱ = $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x}$).

جواب. ۰/۹۴۶۱.

۱۴- مقدار $\int_۰^{\pi/۲} \sin x dx$ را به روش سیمپسون و $h = \frac{\pi}{۸}, \frac{\pi}{۱۶}, \frac{\pi}{۳۲}, \frac{\pi}{۶۴}$ به دست آورید.

جواب. $S(\frac{\pi}{۸}) = ۱/۰۰۰۱۳۴۴$

$S(\frac{\pi}{۱۶}) = ۱/۰۰۰۰۰۸۱$، $S(\frac{\pi}{۳۲}) = ۰/۹۹۹۹۹۹۸۳$، $S(\frac{\pi}{۶۴}) = ۱/۰۰۰۰۰۰۰۳$

۱۵- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید. مقدار $\int_۰^{\pi/۲} f(x)dx$ را به روش ذوزنقه و روش سیمپسون به دست آورید.

x_i	۰	$\pi/۱۲$	$۲\pi/۱۲$	$۳\pi/۱۲$	$۴\pi/۱۲$	$۵\pi/۱۲$	$\pi/۲$
f_i	۰	۰/۲۵۸۸۲	۰/۵	۰/۷۰۷۱۱	۰/۸۶۶۰۳	۰/۹۶۵۹۳	۱

جواب. $T(\frac{\pi}{۱۲}) = ۰/۹۹۴۲۹$، $S(\frac{\pi}{۱۲}) = ۱/۰۰۰۰۳$

۱۶- با استفاده از فرمول نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای $(n = ۳)$ مقدار $\int_۱^۳ e^{-x/۲} dx$ را تقریب کنید.

جواب.۰٫۷۶۶۹۲.

۱۷- با استفاده از فرمول نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای ($n = ۳$) تقریبی از انتگرالهای زیر به دست آورید.

الف. $\int_۰^۱ \sqrt{۱ + x}dx$ ب. $\int_{۱٫۱}^{۱٫۵} e^x dx$

جواب.الف.۰٫۱۰۲۴۵۹۸۲۱ ب. ۱٫۴۷۷۵۲۸۸۵۸

۱۸- مقدار $\int_۱^{۱٫۵} e^{-x^۲} dx$ را به روش نیوتن-کاتس و با $h = \frac{۱}{۶}$ به دست آورید.

جواب.۰٫۱۰۹۳۴۰۴.

۱۹- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۰٫۱۰۹۴۰۰۳.

۲۰- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۰٫۱۰۹۳۶۴۲.

۲۱- مقدار $\int_۱^۲ e^x \sin x dx$ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۱۰٫۹۵۰۱۴۰

۲۲- مقدار انتگرال مساله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

جواب.۱۰٫۹۴۸۴۰۳

۲۳- تقریبهایی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای hهای داده شده، به دست آورید.

الف. $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱ + x}$, $h = ۰٫۱$

ب $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱ + x^۲}$, $h = ۰٫۲$

پ. $\int_۰^۱ \frac{\sin x}{x} dx$, $h = ۰٫۲$

۲۴- تقریبی از $\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ حساب کنید.برای این منظور قرار دهید :

$$\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \int_۰^{۰٫۹} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} + \int_{۰٫۹}^۱ \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

سپس به روش قاعده نقطه میانی و $h = ۰/۰۱$ مقدار $\int_{۰/۹}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $h = ۰/۱$ مقدار $\int_{۰}^{۰/۹} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ را حساب کنید.

۲۵- تقریبی از $\int_{۰}^{۲} x \sin ۲x dx$ را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از ۰/۵ باشد.

جواب.$h = ۰/۵$ و $T(۰/۵) = ۰/۳۹۲$

۲۶- تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از ۰/۰۰۰۱ و به قاعده ذرزنقه‌ای حساب کنید.

الف. $\int_{۰}^{\pi/۲} \cos x dx$ ب. $\int_{۰}^{\pi/۲} x \cos x dx$ پ. $\int_{۰}^{۱} e^x dx$

جواب.الف.$h \simeq ۰/۰۳۴, n = ۲۹$ ب.$n = ۱۱۴$، $h \simeq ۰/۰۱۳۷۸$

پ. $h = ۰/۰۲, n = ۵۰$

۲۷- حدود h را برای محاسبه تقریبی $\int_{۰}^{۱} e^x \sin x dx$ چنان تعیین کنید که:

الف.داشته باشیم $|ET(h)| \leq ۱۰^{-۵}$

ب.داشته باشیم $|ES(h)| \leq ۱۰^{-۵}$

جواب. الف. $h = ۰/۰۰۴۵, n = ۲۲۴$ ب. $h = ۰/۰۷۴۰۰۸, n = ۱۴$

۲۸- روش انتگرالگیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{۰}^{h} f(\sqrt{x})dx \simeq w_۱ f(۰) + w_۲ f'(۰) + w_۳ f(h)$$

ضرایب $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ را طوری به‌دست آورید که روش انتگراگیری فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ دو دقیق باشد.

جواب. $w_۱ = h - \frac{۱}{۲}$ و $w_۲ = \frac{۲}{۳}h\sqrt{h} - \frac{h}{۲}$ و $w_۳ = \frac{۱}{۲}$

۲۹. فرض کنید در تقریب زیر، معیار دقت آن باشد که رابطه برای چند جمله‌ایهای تا درجه ۳ دقیق باشد:

$$\int_{۰}^{۶} f(x)dx \simeq \sum_{i=۰}^{۳} w_i f(x_i)$$

که در آن $x_۰ = ۰$، $x_۱ = ۲$، $x_۲ = ۵$ و $x_۳ = ۶$. مطلوبست محاسبه w_i برای $i = ۰, ۱, ۲, ۳$.

جواب. $w_۰ = \frac{۲}{۵}$، $w_۱ = ۳$، $w_۲ = \frac{۱۲}{۵}$، $w_۳ = ۰$

۳۰. برای محاسبهٔ تقریبی از انتگرال تابع f در فاصلهٔ $[۰, ۶h]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_۰^{۶h} f(x)dx \simeq w_۱ f(h) + w_۲ f(۳h) + w_۳ f(۵h)$$

الف. ضرایب $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ را چنان تعیین کنید که رابطهٔ فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجهٔ دو دقیق باشد.

ب. نشان دهید قاعده فوق برای چند جمله‌ایهای درجهٔ ۳ نیز دقیق است.

جواب. **الف.** $w_۱ = w_۳ = \frac{۹}{۴}h$ و $w_۲ = \frac{۳}{۲}h$

۳۱. قسمتهای الف و ب مساله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \simeq h[w_۱ f(-h) + w_۲ f(۰) + w_۳ f(h)]$$

جواب. $w_۱ = w_۳ = \frac{۱}{۳}$، $w_۲ = \frac{۴}{۳}$

فصل پنجم

روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۵ مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی در بسیاری از مسائل کاربرد دارند.یک معادله دیفرانسیل از مرتبه p، در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد :

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(p)}) = ۰$$

و منظور از حل آن پیدا کردن تابع $y = y(x)$ است که در معادله فوق صدق می‌کند.در درس معادلات دیفرانسیل وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل و یادگیری فنون و روشهای تحلیلی برای به دست آوردن جواب آنها می‌شود.این کار با دسته بندی معادلات انجام می‌گیرد و نشان داده می‌شود که دسته خاصی از معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد.اما، همانند وجود تابع اولیه برای توابع، معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی‌توان به روشهای تحلیلی موجود جواب آنها را به دست آورد.حتی در مواقعی که می‌توان جواب تحلیلی معادلات را به دست آورد، این جواب ممکن

است دارای فرم پیچیده‌ای باشد.مثلاً جواب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(۱) = ۰ \end{cases}$$

به صورت $\ln(x^۲+y^۲) = ۲\arctan(\frac{y}{x})$ می‌باشد که پس از محاسبات زیادی به دست می‌آید به علاوه هرگاه بخواهیم مقدار $y(x)$ را به ازای x داده شده به دست آوریم این کار مشکل است، لذا حل عددی معادلات دیفرانسیل مبحثی است که بسیار موردنظر است و کاربرد دارد.

این قسمت را با ساده‌ترین معادله یعنی معادله مرتبه اول

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_۰) = y_۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

شروع می‌کنیم که در آن $x_۰$ و $y_۰$ مقادیر معلومی هستند.هرگاه y جواب معادله دیفرانسیل (۱) باشد $y(x_n)$ را مقدار واقعی y به ازاء x_n و y_n را مقدار تقریبی در نظر می گیریم، یعنی داریم

$$y(x_n) \simeq y_n$$

روشی را که بررسی می‌کنیم این است که یک h در نظر گرفته و بعد نقاط $x_n = x_۰ + nh$ را در نظر می‌گیریم.هدف این است که $y(x_n)$ را توسط y_n تقریب بزنیم و y_n را به دست آوریم.برای این منظور روشهای زیادی وجود دارند که ذیلاً چند تا از آنها را معرفی می‌کنیم.

۲.۵ روش بسط تیلور

یکی از روشهای حل عددی معادلات دیفرانسیل، استفاده از سری تیلور است. معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید که معادله‌ای از مرتبه اول است و در آن تابع f ممکن است نسبت به y

خطی یا غیر خطی باشد.در هر صورت فرض می‌کنیم f به اندازه کافی نسبت به x و y مشتق‌پذیر باشد.هرگاه $x_1 = x_0 + h$ در این صورت بسط تیلور تابع y را حول x_0 می‌نویسیم، بنابراین خواهیم داشت :

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_0) + \cdots \qquad (2)$$

چون $y(x)$ مجهول است، مشتقات آن نیز موجود نخواهند بود ولی با استفاده از (۱) و به شرط وجود مشتقات f نسبت به x و y تا هر مرتبه دلخواه می‌توان y'، y'' و ...را به دست آورد.هرگاه $y' = f(x, y) = f$ در این صورت :

$$y'' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

به همین ترتیب می‌توانیم مشتقات مرتبه بالاتر را نیز به دست آوریم.هر چند همانطور که روابط فوق نشان می‌دهند حتی اگر تابع f تابعی ساده باشد، مشتقات مرتبه بالای y می‌توانند پیچیده باشند.لذا امکان استفاده از جملات با مرتبه بالا در سری تیلور نیست.بنابراین بایستی سری (۲) را محدود کنیم که این عمل باعث می‌شود که جواب به دست آمده برای معادله در یک نقطه از فاصله $[a, b]$ با مقدار واقعی جواب، اختلاف (فاحش) داشته باشد.هرگاه سری(۲) را تا مشتق مرتبه kام بنویسیم در این صورت

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \simeq y(x_0) + hy'(x_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_0) = y_1 \qquad (3)$$

برای تعیین جواب معادله (۱) در نقطه $x_2 = x_1 + h$ مراحل بالا را تکرار می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت

$$y(x_2) = y(x_1 + h) \simeq y(x_1) + hy'(x_1) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_1) \qquad (4)$$

البته در اینجا دیگر $y(x_۱)$ را نداریم و ناچار بایستی مقدار تقریبی آن یعنی $y_۱$ را قرار دهیم، در نتیجه :

$$y(x_۲) \simeq y_۲ = y_۱ + hy'_۱ + \cdots + \frac{h^k}{k!} y_۱^{(k)}$$

با تکرار روش فوق y را در تمام نقاط $x_i = x_۰ + ih$ برای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$ تعیین می‌کنیم.

۱.۲.۵ الگوریتم روش تیلور از مرتبه k

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x, y)$ با شرط $y(x_۰) = y_۰$ در فاصله $[a, b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱. فاصله $[a, b]$ را به N قسمت مساوی به طول $h = \frac{b-a}{N}$ تقسیم کرده و قرار می‌دهیم :

$$x_۰ = a, \qquad x_N = b, \qquad y(x_n) = y(a + nh), \qquad x_n = a + nh$$

۲. با داشتن y_n مقدار تقریبی $y(x_{n+۱})$ یعنی $y_{n+۱}$ را از فرمول زیر به می‌آوریم:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_{n+۱} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^۲}{۲!} f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-۱)}(x_n, y_n) \\ n = ۰, ۱, ۲, \cdots, N-۱ \qquad (۵) \end{array}}$$

مثال ۱. با استفاده از روش تیلور مرتبه چهار مطلوبست برآورد $y(۰/۵)$ مشروط به اینکه داشته باشیم :

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

حل: داریم $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۱$ و $f(x, y) = x + y$ بنابراین :

$$y' = f(x, y) = x + y$$

$$y'' = f'(x, y) = ۱ + y' = ۱ + x + y$$

$$y''' = f''(x,y) = y'' = ۱ + x + y$$

$$y^{(۴)} = f'''(x,y) = y''' = ۱ + x + y$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۵) و اختیار نمودن $k = ۴$ و $h = ۰/۱$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} y_{n+۱} &= y_n + ۰/۱(x_n + y_n) + \frac{(۰/۱)^۲}{۲!}(۱ + x_n + y_n) + \frac{(۰/۱)^۳}{۶}(۱ + x_n + y_n) \\ &+ \frac{(۰/۱)^۴}{۲۴}(۱ + x_n + y_n) \\ &\simeq ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷x_n + ۱/۱۰۵۱۷y_n \end{aligned}$$

لذا

$$y_۱ = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷(۰) + ۱/۱۰۵۱۷(۱) = ۱/۱۱۰۳۴$$

$$y_۲ = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷(۰/۱) + ۱/۱۰۵۱۷(۱/۱۱۰۳۴) = ۱/۲۴۲۸۰$$

$$y_۳ = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷(۰/۲) + ۱/۱۰۵۱۷(۱/۲۴۲۸۰) = ۱/۳۹۹۷۱$$

$$y_۴ = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷(۰/۳) + ۱/۱۰۵۱۷(۱/۳۹۹۷۱) = ۱/۵۸۳۶۴$$

$$y_۵ = ۰/۰۰۵۱۷ + ۰/۱۰۵۱۷(۰/۴) + ۱/۱۰۵۱۷(۱/۵۸۳۶۴) = ۱/۷۹۷۴۳$$

در نتیجه

$$y(۰/۵) \simeq y_۵ = ۱/۷۹۷۴۳$$

۳.۵ روش اویلر

هرگاه در الگوریتم تیلور قرار دهیم $k = ۱$، خواهیم داشت :

$$\boxed{y_{n+۱} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (۶)}$$

این روش به روش اویلر موسوم است.

برنامه کامپیوتری روش اویلر:

```
c
c       Euler's Method for solving the Following Problem:
c   y'=f(x,y), y(x0)=y0
        F(x,y)=-y+x+1
        read(*,*) x0,y0,h,M
        x=x0
        y=y0
        write(*,*) x,y
        do 10 n=1,M
            y=y+h*F(x,y)
            x=x+h
            write(*,*) x,y
10      continue
        end
```

مثال ۲. معادله $y' = ۱ - \frac{y}{x}$ را با شرط $y(۲) = ۲$ در نظر بگیرید.به روش اویلر تقریبی از جواب معادله را در $x = ۲/۱$ با قرار دادن $h = ۰/۱$ به دست آورید.

حل: داریم $x_۰ = ۲$، $y_۰ = ۲$، $h = ۰/۱$ و $f(x,y) = ۱ - \frac{y}{x}$ بنابراین

$$\begin{aligned} y(۲/۱) = y(x_۱) \simeq y_۱ &= y_۰ + hf(x_۰, y_۰) \\ &= ۲ + ۰/۱(۱ - \frac{y_۰}{x_۰}) \\ &= ۲ + ۰/۱(۱ - \frac{۲}{۲}) \\ &= ۲ \end{aligned}$$

مثال ۳. تقریبی از $y(۰/۵)$ برای معادله دیفرانسیل مثال ۱ به روش اویلر و با $h = ۰/۱$ به دست

آورید.

حل: داریم $x_\circ = \circ$، $y_\circ = 1$، $h = \circ/1$ و $f(x,y) = x + y$ ، لذا

$$y_{n+1} = y_n + \circ/1(x_n + y_n) = \circ/1x_n + 1/1y_n$$

بنابراین :

$$y_1 = \circ/1x_\circ + 1/1y_\circ = \circ/1(\circ) + 1/1(1) = 1/1$$

$$y_2 = \circ/1x_1 + 1/1y_1 = \circ/1(\circ/1) + 1/1(1/1) = 1/22$$

$$y_3 = \circ/1x_2 + 1/1y_2 = \circ/1(\circ/2) + 1/1(1/22) = 1/362$$

$$y_4 = \circ/1x_3 + 1/1y_3 = \circ/1(\circ/3) + 1/1(1/362) = 1/5282$$

$$y_5 = \circ/1x_4 + 1/1y_4 = \circ/1(\circ/4) + 1/1(1/5282) = 1/72102$$

در نتیجه $y(\circ/5) \simeq y_5 = 1/72102$.

۴.۵ روش رونگه‌ـکوتا

روش تیلور مرتبه k در عمل برای مراتب بالا قابل استفاده نیست زیرا به مشتقات مرتبه بالا نیاز دارد. حالت خاص $k = 1$ یعنی روش اویلر نیز چندان مفید نیست، مگر اینکه h را خیلی کوچک در نظر بگیریم. لذا برای حل معادله دیفرانسیل از روشهای دیگر استفاده می‌شود که در آن نیازی به محاسبه مشتقهای مرتبه بالای f نیست، در عین حال از دقتی در حد دقت روش تیلور و مرتبه بالا برخوردار است.

۱.۴.۵ روش رونگه-کوتای مرتبه دو

الگوریتم روش رونگه-کوتای مرتبه دو:

برای مقدار ثابت h و $x_n = x_\circ + nh$ قرار دهید

$$\boxed{\begin{cases} k_۱ = hf(x_n, y_n) \\ k_۲ = hf(x_n + h, y_n + k_۱) \\ y_{n+۱} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) \end{cases} \qquad (۷)}$$

عملیات فوق را برای $n = \circ, ۱, ۲, \cdots$ تکرار کنید.

برنامه کامپیوتری روش رونگه-کوتای مرتبه دو:

```
c
c      Second Order Runge-Kutta Method for Solving the Following Problem:
c  y'=f(x,y), y(x0)=y0
       implicite real (k)
       F(x,y)=-y+x+1
       read(*,*) x0,y0,h,M
       x=x0
       y=y0
       write(*,*) x,y
       do 10 n=1,M
          k1=h*F(x,y)
```

```
      x=x+h
      z=y+k1
      k2=h*F(x,z)
      y=y+(k1+k2)/2.
      write(*,*) x,y
10    continue
      end
```

مثال ۴. تقریبی از $y(۰/۲)$ به دست آورید هرگاه داشته باشیم

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

از روش رونگه‌ـکوتای مرتبه ۲ استفاده کنید و قرار دهید $h = ۰/۱$.

حل: با توجه به الگوریتم (۷) داریم :

$$\begin{cases} k_۱ = ۰/۱(x_n + y_n) \\ k_۲ = ۰/۱(x_n + ۰/۱ + y_n + k_۱) \\ y_{n+۱} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) \end{cases}$$

بنابراین برای $n = ۰$ خواهیم داشت :

$$k_۱ = ۰/۱(۰ + ۱) = ۰/۱$$

$$k_۲ = ۰/۱(۰/۱ + ۱/۱) = ۰/۱۲$$

$$y_۱ = ۱ + \frac{۱}{۲}(۰/۱ + ۰/۱۲) = ۱/۱۱$$

و برای $n = 1$ داریم:

$$k_1 = 0.1(0.1 + 1.11) = 0.121$$

$$k_2 = 0.1(0.2 + 1.11 + 0.121) = 0.1431$$

$$y_2 = 1.11 + \frac{1}{2}(0.122 + 0.1431) = 1.24205$$

مثال ۵. فرض کنید

$$\begin{cases} y' = 1 - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

با $h = 0.05$ و به روش رونگه‌ـکوتای مرتبه دوم تقریبی برای $y(0.05)$ به دست آورید.

حل: داریم: $x_0 = 0$ ،$y_0 = 0$ ،$h = 0.05$ و $f(x, y) = 1 - y$، بنابراین

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.05(1 - 0) = 0.05$$

$$k_2 = hf(x_0 + 0.05, y_0 + k_1) = 0.05f(0.05, 0.05) = 0.05(1 - 0.05) = 0.0475$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.04875$$

لذا

$$y(0.05) \simeq y_1 = 0.04875$$

۲.۴.۵ روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار

الگوریتم روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار

برای معادله $y' = f(x, y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ و مقدار ثابت h قرار دهید

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

که در آن

$$k_۱ = hf(x_n, y_n)$$
$$k_۲ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۱}{۲})$$
$$k_۳ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۲}{۲})$$
$$k_۴ = hf(x_n + h, y_n + k_۳)$$

با تغییر مقدار $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ و داشتن y_n مقدار تقریبی $y(x_{n+۱})$ یعنی $y_{n+۱}$ به دست خواهد آمد.

برنامه کامپیوتری روش رونگه‌ـکوتای مرتبهٔ چهار:

```
c
c     Forthd Order Runge-Kutta Method for Solving the Following Problem:
c  y'=f(x,y), y(x0)=y0
      implicite real (k)
      F(x,y)=-y+x+1
      read(*,*) x0,y0,h,M
      x=x0
      y=y0
      write(*,*) x,y
      do 10 n=1,M
         k1=h*F(x,y)
         x=x+0.5*h
         z=y+0.5*k1
```

```
      k2=h*F(x,z)
      z=y+0.5*k2
      k3=h*F(x,z)
      x=x+0.5*h
      z=y+k3
      k4=h*F(x,z)
      y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6.
      write(*,*) x,y
10    continue
      end
```

مثال ۶. معادله $y' = x + y$ را با شرط $y(۰) = ۱$ در نظر بگیرید.تقریبی از $y(۰/۱)$ را با استفاده از فرمول رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار با $h = ۰/۱$ به دست آورید.

حل: داریم $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۱$، $f(x, y) = x + y$ و $h = ۰/۱$.بنابراین

$$k_۱ = ۰/۱(۰ + ۱) = ۰/۱$$

$$k_۲ = ۰/۱(۰/۰۵ + ۱/۰۵) = ۰/۱۱$$

$$k_۳ = ۰/۱(۰/۰۵ + ۱/۰۵۵) = ۰/۱۱۰۵۰$$

$$k_۴ = ۰/۱(۰/۱ + ۱/۱۱۰۵۰) = ۰/۱۲۱۰۵$$

بنابراین

$$y_۱ = ۱ + \frac{۱}{۶}(۰/۱ + ۲ \times ۰/۱۱ + ۲ \times ۰/۱۱۰۵۰ + ۰/۱۲۱۰۵) = ۱/۱۱۰۳۴$$

لذا

$$y(۰/۱) \simeq y_۱ = ۱/۱۱۰۳۴$$

توجه: همانگونه که ملاحظه می‌کنید در روشهای رونگه‌ـکوتا تعداد محاسبات زیاد است وعملاً انجام این محاسبات برای x_nهای دور از $x_۰$ با دست امکان‌پذیر نیست و نیاز به استفاده از کامپیوتر داریم.

مثال ۷. معادله $y' = 1 - y^2$ را با شرط $y(0) = 0$ با قرار دادن $h = 0/1$ به روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار حل کنید و مقدار تقریبی $y(0/1)$ را به دست آورید.

حل: داریم $x_0 = 0$، $y_0 = 0$، $f(x,y) = 1 - y^2$ و $h = 0/1$.لذا با استفاده از الگوریتم روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار داریم :

$$k_1 = 0/1, \quad k_2 = 0/09975, \quad k_3 = 0/09975, \quad k_4 = 0/09900$$

بنابراین

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0/09967$$

در نتیجه

$$y(0/1) \simeq y_1 = 0/09967$$

توجه: روش رونگه‌ـکوتا مرتبه چهارم از دقت بیشتری نسبت به روش مرتبه دوم رونگه‌ـکوتا برخوردار است و در عمل بیشتر از آن استفاده می‌شود.

۵.۵ دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

یک دستگاه مرتبه اول از معادلات دیفرانسیل به صورت

$$y_i' = f_i(x, y_1, \cdots, y_n) \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

به منظور تعیین n تابع $y_i(x)$ با شرایط اولیه $y_i(x_0) = a_i$ در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.هرگاه $n = 2$ در این صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, p) \\ p' = f_2(x, y, p) \end{cases} \qquad (8)$$

با شرایط اولیه زیر :

$$\begin{cases} y(x_\circ) = y_\circ \\ p(x_\circ) = p_\circ \end{cases} \qquad (۹)$$

هدف از حل (۸) پیدا نمودن توابع مجهول $y(x)$ و $p(x)$ است که در شرایط اولیه (۹) صدق می‌کنند.

۱.۵.۵ روش رونگه-کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

دستگاه معادلات دیفرانسیل (۸) را با شرایط اولیه (۹) در نظر بگیرید، به منظور حل عددی این دستگاه معادلات با قرار دادن $x_n = x_\circ + nh$ برای $n = \circ, ۱, ۲, \cdots$ با داشتن y_n و p_n (تقریبهای $y(x_n)$ و $p(x_n)$) به روش زیر مقادیر $y(x_{n+۱})$ و $p(x_{n+۱})$ را با $y_{n+۱}$ و $p_{n+۱}$ تقریب می‌زنیم؛ قرار می‌دهیم :

$$k_۱ = hf_۱(x_n, y_n, p_n)$$

$$l_۱ = hf_۲(x_n, y_n, p_n)$$

$$k_۲ = hf_۱(x_n + \frac{۱}{۲}h, y_n + \frac{۱}{۲}k_۱, p_n + \frac{۱}{۲}l_۱)$$

$$l_۲ = hf_۲(x_n + \frac{۱}{۲}h, y_n + \frac{۱}{۲}k_۱, p_n + \frac{۱}{۲}l_۱)$$

$$k_۳ = hf_۱(x_n + \frac{۱}{۲}h, y_n + \frac{۱}{۲}k_۲, p_n + \frac{۱}{۲}l_۲)$$

$$l_۳ = hf_۲(x_n + \frac{۱}{۲}h, y_n + \frac{۱}{۲}k_۲, p_n + \frac{۱}{۲}l_۲)$$

$$k_۴ = hf_۱(x_n + h, y_n + k_۳, p_n + l_۳)$$

$$l_۴ = hf_۲(x_n + h, y_n + k_۳, p_n + l_۳)$$

لذا با داشتن مقادیر فوق خواهیم داشت :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

حال با داشتن مقادیر y_{n+1} و p_{n+1} الگوریتم فوق را برای $x = x_{n+2}$ تکرار می‌کنیم.روش فوق روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۸) می‌باشد.

مثال ۸. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = p = f_1(x, y, p) \\ p' = -y + 0.1(1 - y^2)p = f_2(x, y, p) \end{cases}$$

با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $p(0) = 0$.با قرار دادن $h = 0.2$ و استفاده از روش رونگه‌ـکوتا مرتبه چهار تقریبهایی برای $y(0.2)$ و $p(0.2)$ به دست آورید.

حل: فرمولهای رونگه‌ـکوتا برای این دستگاه معادلات عبارتند از :

$$k_1 = hp_n$$
$$l_1 = h[-y_n + 0.1(1 - y_n^2)p_n]$$
$$k_2 = h(p_n + \frac{1}{2}l_1)$$
$$l_2 = h\{-(y_n + \frac{1}{2}k_1) + 0.1[1 - (y_n + \frac{1}{2}k_1)^2](p_n + \frac{1}{2}l_1)\}$$
$$k_3 = h(p_n + \frac{1}{2}l_2)$$
$$l_3 = h\{-(y_n + \frac{1}{2}k_2) + 0.1[1 - (y_n + \frac{1}{2}k_2)^2](p_n + \frac{1}{2}l_2)\}$$

$$k_4 = h(p_n + l_3)$$

$$l_4 = h\{-(y_n + k_3) + 0.1[1 - (y_n + k_3)^2](p_n + l_3)\}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

با انتخاب $h = 0.2$ خواهیم داشت :

$$k_1 = 0.2p_0 = 0.2(0) = 0$$

$$l_1 = 0.2[-1 + 0.1(1 - 1)(0)] = -0.2$$

$$k_2 = 0.2(-0.1) = -0.02$$

$$l_2 = 0.2[-1 + 0.1(1 - 1)(-0.1)] = -0.2$$

$$k_3 = 0.2(-0.1) = -0.02$$

$$l_3 = 0.2[-0.99 + 0.1(0.02)(-0.1)] \simeq -0.198$$

$$k_4 = 0.2(-0.198) \simeq -0.04$$

$$l_4 = 0.2[-0.98 + 0.1(0.04)(-0.198)] \simeq -0.196$$

بنابراین با استفاده از مقادیر فوق خواهیم داشت

$$y(0.2) \simeq y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 - 0.04 - 0.04 - 0.04) = 0.98$$

$$p(0.2) \simeq p_1 = 0 + \frac{1}{6}(-0.2 - 0.4 - 0.396 - 0.196) \simeq -0.199$$

۶.۵ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

یکی از روشهای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول است.معادله مرتبه دوم $y'' = f(x, y, y')$ را با شرایط اولیه $y(x_\circ) = a$ و $y'(x_\circ) = b$ در نظر بگیرید.در این صورت با قرار دادن $p = y'$ خواهیم داشت :

$$p' = y'' = f(x, y, p)$$

درنتیجه معادله مرتبه دوم اولیه به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = f(x, y, p) \end{cases}$$

که دارای شرایط اولیه $y(x_\circ) = a$ و $p(x_\circ) = b$ می‌باشد.

مثال ۹. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید :

$$y'' - ۰/۱(۱ - y^۲)y' + y = ۰$$

$$y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = ۰$$

تقریبی برای $y(۰/۲)$ به دست آورید.

حل: یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول معادل با معادله فوق به صورت زیر است :

$$y' = p = f_۱(x, y, p)$$

$$p' = -y + ۰/۱(۱ - y^۲)p = f_۲(x, y, p)$$

$$y(۰) = ۱, \quad p(۰) = ۰$$

دستگاه فوق همان دستگاه مثال ۸ است، لذا

$$y(۰/۲) \simeq ۰/۹۸$$

مثال ۱۰. دستگاه معادلات دیفرانسیل معادل با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را بنویسید.

$$y'' + ۱۰۱y' + ۱۰۰y = ۰$$
$$y(۰) = ۱, \quad y'(۰) = -۱$$

حل: با قرار دادن $y' = p$ خواهیم داشت : $p' + ۱۰۱p + ۱۰۰y = ۰$ لذا دستگاه مورد نظر عبارتست از :

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -۱۰۰y - ۱۰۱p \end{cases}$$

با شرایط اولیه زیر

$$y(۰) = ۱ \quad , \quad p(۰) = -۱$$

مثال ۱۱. مانند مثال ۱۰ در مورد معادله زیر عمل کنید.

$$y'' - ۶۴y + ۱۰ = ۰$$
$$y(۰) = ۰, \quad y'(۰) = ۱$$

حل: با قرار دادن $y' = p$ خواهیم داشت :

$$p' - ۶۴y + ۱۰ = ۰$$

بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول مورد نظر عبارتست از :

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -۱۰ + ۶۴y \end{cases}$$

با شرایط اولیه زیر :

$$y(\circ) = \circ \quad , \quad p(\circ) = ۱$$

مجموعه مسائل فصل پنجم

۱-.معادله $xy' = x - y, x \neq \circ$ با شرط $y(۲) = ۲$ مفروض است.به روش تیلور مرتبه چهار تقریبی از جواب آن را در $x = ۲/۱$ به دست آورید.قرار دهید $h = \circ/۱$.

جواب.۲/۰۰۲۳۷۵.

۲- معادله زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(\circ) = ۱ \end{cases}$$

به روش تیلور مرتبه چهار و با $h = \circ/۱$ تقریبی از $y(\circ/۵)$ به دست آورید.

جواب.۱/۷۹۷۴۴

۳- معادله $y' = y$ را با شرط $y(\circ) = ۱$ با فرض $h = \circ/\circ۱$ به روش اویلر حل کنید و تقریبی برای $y(\circ/\circ۴)$ به دست آورید.

جواب.۱/۰۴۰۶۰۶

۴- مطلوبست جواب تقریبی معادله دیفرانسیل زیر در فاصله $[\circ, ۱]$ با $h = \circ/۲۵$ و به روش اویلر.

$$\begin{cases} y' = \sin x + \sin y \\ y(\circ) = ۱ \end{cases}$$

جواب.$y_1 = ۱/۲۱۰۴$، $y_2 = ۱/۵۰۶۲$، $y_3 = ۱/۸۷۵۵$، $y_4 = ۲/۲۸۴۴$

۵- با استفاده از روش اویلر معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله $[۰,۲]$ حل کنید.

$$\begin{cases} y' = -۱۰(x-۱)y \\ y(۰) = e^{-۵} \end{cases}$$

قرار دهید $h = ۰/۱$ و مقادیر زیر را تقریب کنید.

الف. $y(۰/۵)$ ب. $y(۱)$ پ. $y(۱/۵)$ ت. $y(۲)$

جواب.الف. $۰/۱۲۵۴$ ب. $۰/۴۵۲$ پ. $۰/۱۳۷$ ت. $۰/۰۰۰۲$

۶- فرض کنید

$$\begin{cases} y' = x - y + ۱ \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

با به کار بردن روش بسط تیلور مرتبه دوم و $h = ۰/۱$ مقدار تقریبی $y(۰/۱)$ را به دست آورید.

جواب.$۱/۰۰۵$

۷- برای معادله مساله ۶ با همان $h = ۰/۱$ و روش بسط تیلور مرتبه دوم مقدار تقریبی $y(۰/۲)$ را به دست آورید.

جواب.$۱/۰۱۹$

۸- هرگاه

$$\begin{cases} y' = ۲(x+۱)\cos ۲y \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

تقریبی از $y(۰/۱)$ را با $h = ۰/۱$ به روش اویلر به دست آورید.

جواب.$۰/۲$

۹- تقریبی از جواب معادلهٔ

$$\begin{cases} y' = x \sin \pi y \\ y(۰/۵) = ۰/۵ \end{cases}$$

را به ازای $h = ۰/۱$ در $x = ۰/۶$ به روش اویلر حساب کنید.

جواب.۰/۵۵

۱۰- معادله دیفرانسیل زیر را با روش رونگه‌ـکوتا مرتبه دو حل کنید و تقریبی از $y(۰/۱)$ به دست آورید، قرار دهید $h = ۰/۰۵$.

$$\begin{cases} y' = -y + ۱ \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

جواب.۰/۰۹۵۱۲۳۴۳۷

۱۱- معادله دیفرانسیل مسأله ۱۰ را با روش رونگه‌ـکوتای مرتبه چهار حل کنید.قرار دهید $h = ۰/۰۵$ و مقادیر زیر را به دست آورید.

الف. $y(۰/۱)$ ب. $y(۰/۲)$ پ. $y(۰/۳)$ ت. $y(۰/۴)$

ث. $y(۰/۵)$

جواب.الف. ۰/۰۹۵۱۶۲۵۰ ب. ۰/۱۸۱۲۶۹۱۰ پ. ۰/۲۵۹۱۸۱۵۸

ت. ۰/۳۲۹۶۷۹۷۱ ث. ۰/۳۹۳۴۶۹۰۶

۱۲- با استفاده از روش رونگه‌ـکوتا مرتبه چهار معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله $[۰, ۱]$ حل نمائید.قرار دهید $h = ۰/۲۵$

$$\begin{cases} ۱۰y' = x^۲ + y^۲ \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

و مقادیر زیر را به دست آورید.

الف. $y(۰/۲۵)$ ب. $y(۰/۵)$ پ. $y(۰/۷۵)$ پ. $y(۱)$

جواب.الف. ۱/۰۲۶۲ ب ۱/۰۵۶۹

پ. ۱/۰۹۵۷ ت. ۱/۱۴۶۴

۱۳- با استفاده از روش رونگه-کوتا مرتبه چهار و قرار دادن $h = ۰/۱$ تقریبی از مقدار $y(۱/۱)$ برای معادله دیفرانسیل زیر به دست آورید.

$$\begin{cases} y' = xy^{۱/۳} \\ y(۱) = ۱ \end{cases}$$

جواب.۱/۱۰۶۸۲

۱۴- تقریبهایی از $y(۰/۴)$ و $p(۰/۴)$ را برای دستگاه معادلات مثال ۸ به دست آورید.

۱۵- تقریبی برای $y(۰/۶)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۹ به دست آورید.

۱۶- با قرار دادن $h = ۰/۱$ تقریبهایی از $y(۰/۱)$ و $y(۰/۲)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۱۰ به دست آورید.مقادیر به دست آمده را با مقدار واقعی جواب که $y(x) = e^{-x}$ می‌باشد، مقایسه کنید.

۱۷- با قرار دادن $h = ۰/۲$ تقریبهایی از $y(۰/۱)$ و $y(۰/۲)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۱۱ به دست آورید.

فصل ششم

ماتریسها و حل دستگاههای معادلات خطی و غیر خطی

۱.۶ مقدمه

در این فصل روشهایی را برای حل دستگاههای معادلات (خطی و غیر خطی) معرفی می‌نماییم و در فصل هفتم به تعیین مقادیر ویژه ماتریسها خواهیم پرداخت.لذا قبل از معرفی روشهای مورد نظر، تعاریف و قضایایی را که در این دو فصل به آن نیاز خواهیم داشت ، ارائه می‌دهیم.

۱.۱.۶ ماتریسها و بردارها

ماتریس را به صورت یک آرایه مستطیلی از اعداد تعریف می‌کنیم.اعداد، اعضاء، عناصر یا مولفه‌های ماتریس نامیده می‌شوند.برای نشان دادن ماتریسها، معمولاً از حروف بزرگ مانند A، B و غیره

استفاده می‌کنیم.مولفه‌های ماتریس را با حروف کوچک لاتین با دو زیرنویس، مثلاً a_{ij} ، b_{ij} نشان می‌دهیم.که در آن اندیس اول یعنی i، معرف شماره سطر و اندیس دوم یعنی j نشان دهنده شماره ستونی است که مولفه a_{ij} از ماتریس A در آرایه موجود است.

مثال ۱. ماتریس A که در زیر مشخص شده یک ماتریس با m سطر و n ستون می‌باشد.

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

توجه ۱. هرگاه بخواهیم یک ماتریس را با یک عضو کلی نشان دهیم از نماد (a_{ij}) استفاده می‌کنیم.

توجه ۲. چون ماتریس A در مثال ۱ دارای m سطر و nستون است، می‌گوییم A ماتریسی m در n یا ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است.

تعریف ۱.۶ هرگاه تعداد سطرها و ستونهای ماتریسی مانند A برابر باشد، یعنی $m = n$، آن را یک **ماتریس مربع** می‌نامیم.همچنین گوییم A ماتریسی (مربع) از مرتبه n می‌باشد.

مثال ۲. ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۷ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ & \sqrt{۵} \\ ۴ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

در این صورت A ماتریسی مرتبه ۲ و B ماتریسی مرتبه ۳ می‌باشد.

تساوی دو ماتریس. گوییم دو ماتریس A و B مساوی هستند و می‌نویسیم $A = B$، هرگاه A و B هم مرتبه بوده و برای تمام i و jها داشته باشیم :

$$a_{ij} = b_{ij}$$

که در آن $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$.

ضرب عدد در ماتریس. ضرب عدد α در ماتریس $A=(a_{ij})$ را به صورت αA یا $A\alpha$ نشان داده و عبارت است از :

$$\alpha A=(\alpha a_{ij}) \tag{۱}$$

مثال ۳. هرگاه $\alpha=۲$ در این صورت برای ماتریس A در مثال ۲ ماتریس $۲A$ عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱۴ \\ ۱۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

جمع دو ماتریس. دو ماتریس را زمانی می‌توان با هم جمع نمود که هم مرتبه باشند.هرگاه $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ ماتریسهای هم مرتبه $m\times n$ باشند در این صورت جمع آنها را با $A+B$ نشان می‌دهیم که عبارتست از ماتریسی $m\times n$ مانند $C=(c_{ij})$ که برای هر i و j داریم :

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \tag{۲}$$

و می‌نویسیم $C=A+B$.

مثال ۴. ماتریس $C=A+B$ را به دست آورید، هرگاه داشته باشیم :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل: بنا به رابطه (۲) داریم :

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس. ماتریس $A = (a_{ij})$ زمانی در ماتریس $B = (b_{ij})$ قابل ضرب است که تعداد ستونهای A برابر تعداد سطرهای ماتریس B باشد.هرگاه A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times k$ باشد، در این صورت حاصل ضرب ماتریس A در B که آن را به صورت AB می‌نویسیم ماتریسی $m \times k$ مانند $C = (c_{ij})$ است که برای هر i و j داریم :

$$c_{ij} = \sum_{r=۱}^{n} a_{ir} b_{rj} \tag{۳}$$

و می‌نویسیم $C = AB$.

توجه: از تعریف فوق واضح است که در حالت کلی $AB \neq BA$.

مثال ۵. ماتریس $C = AB$ را برای ماتریسهای A و B در مثال ۴ به دست آورید.

حل: بنا به رابطه (۳) خواهیم داشت :

$$C = \begin{bmatrix} ۱ \times ۰ + ۳ \times (-۳) & ۱ \times ۲ + ۳ \times ۵ \\ ۲ \times ۰ + (-۷) \times (-۳) & ۲ \times ۲ + (-۷) \times ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۹ & ۱۷ \\ ۲۱ & -۳۱ \end{bmatrix}$$

بردار. ماتریسهایی راکه فقط دارای یک سطر یا فقط یک ستون می‌باشند، یک بردار می‌نامیم.ماتریسی را که دارای یک سطر باشد یک **بردار سطری** و ماتریسی را که دارای یک ستون باشد یک **بردار ستونی** می‌نامیم. معمولاً بردارها را با حروف کوچک و سیاه نشان می‌دهیم، مانند $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.ما بیشتر به بردارهای ستونی نیاز داریم تا بردارهای سطری، از این رو فرض می‌کنیم که هر بردار ستونی است، مگر خلاف آن تصریح شده باشد.

مثال ۶. بردار $\mathbf{a}$ در زیر یک بردار سطری و بردار $\mathbf{b}$ یک بردار ستونی است.

$$\mathbf{a} = [۱, ۲, ۰, ۵]$$

$$
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \\ ۷ \\ -۳ \end{bmatrix} .
$$

چند ماتریس خاص.

فرض کنیم A ماتریسی مربع از مرتبه n باشد، چند نوع خاص از ماتریسها که در قسمت‌های بعد به آن نیاز داریم به قرار زیرند :

ماتریس صفر. ماتریسی را که تمام مولفه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر نامیده و آن را با $\circ$ نشان می‌دهیم.

توجه کنید که لازم نیست ماتریس صفر یک ماتریس مربع باشد.

ماتریس قطری. ماتریس مربع A یک ماتریس قطری نامیده می‌شود، هرگاه برای هر i و j که $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = \circ$.

مولفه‌های قطری یک ماتریس. مولفه‌های a_{ii}، از یک ماتریس مربع مولفه‌های قطری نامیده می‌شود.یک ماتریس قطری را به کمک اعضای قطری آن به صورت زیر نشان می‌دهیم :

$$
A = \operatorname{diag}(a_{ii})
$$

مثال ۷. ماتریسهای زیر ماتریسهای قطری می‌باشند.

$$
A = \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۷ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & \circ & \circ \\ \circ & ۵ & \circ \\ \circ & \circ & -۹ \end{bmatrix}
$$

ماتریس واحد یا همانی. ماتریسی قطری که تمام مولفه‌های قطری آن برابر یک باشند ماتریس واحد یا همانی نامیده می‌شود.ماتریس واحد را با I نشان می‌دهیم. مرتبه ماتریس واحد را به

صورت زیر نویس می‌نویسیم، مانند I_n، که نشان دهنده ماتریس واحد مرتبه n است.

مثال ۸. ماتریسهای $I_۲$ و $I_۳$ به صورت زیر می‌باشند :

$$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

توجه: هرگاه A ماتریسی $m \times n$ باشد، در این صورت داریم :

$$I_m A = A I_n = A$$

همچنین داریم :

$$II = I$$

ماتریس بالا مثلثی. ماتریس مربع $A = (a_{ij})$ را بالا مثلثی گوییم، هرگاه برای هر $i > j$ داشته باشیم :

$$a_{ij} = ۰$$

ماتریس پایین مثلثی. ماتریس مربع $A = (a_{ij})$ را پایین مثلثی گوییم، هرگاه برای هر $i < j$ داشته باشیم :

$$a_{ij} = ۰$$

مثال ۹. ماتریس A در زیر یک ماتریس بالا مثلثی و ماتریس B یک ماتریس پایین مثلثی است.

$$B = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۹ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۶ ماتریس مربع A وارونپذیر یا **معکوس‌پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه ماتریسی مربع مانند B وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم :

$$AB = BA = I_n$$

که در آن n مرتبه ماتریسهای A و B می‌باشد.معمولاً ماتریس وارون A را با A^{-1} نشان می‌دهیم، لذا هرگاه A وارونپذیر باشد خواهیم داشت :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

تعریف ۲.۶ ماتریس مربع A **نامنفرد** نامیده می‌شود، هرگاه وارونپذیر باشد.در غیر این صورت A را **منفرد** می‌نامیم.

مثال ۱۰. ماتریس زیر را در نظر بگیرید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت A نامنفرد است، زیرا داریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۶ ترانهاده یک ماتریس $m \times n$ مانند $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times m$ است که از تعویض سطرها و ستونهای A به دست می‌آید.به ویژه ترانهاده یک بردار سطری، برداری ستونی است و بر عکس ترانهاده یک بردار ستونی، برداری سطری است.ترانهاده ماتریس A را با A^t نشان

می‌دهیم.

مثال ۱۱. ترانهاده ماتریس A در مثال ۱۰ به صورت زیر است :

$$A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۲. ترانهاده بردارهای زیر را به دست آورید.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = [۱, ۰, -۵]$$

حل: ترانهاده بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عبارتند از :

$$\mathbf{a}^t = [۳,\ ۷,\ ۰] \quad , \quad \mathbf{b}^t = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

تذکر. گاهی به خاطر راحتی در نوشتار، یک بردار ستونی را به کمک ترانهاده آن، که برداری سطری است، نشان می‌دهیم.به عنوان مثال

بردار $\mathbf{a}$ در مثال ۱۲ را به صورت $\mathbf{a} = [۳, ۷, ۰]^t$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۶ مجموع مولفه‌های قطری یک ماتریس مربع مرتبه n را **اثر یا تریس** ماتریس می‌نامیم و آن را با $\mathrm{tr}A$ نشان می‌دهیم.لذا هرگاه $A = (a_{ij})$ در این صورت

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii} \tag{۴}$$

مثال ۱۳. اثر ماتریس A در مثال ۱۰ و اثر ماتریس B در مثال ۹ را به دست آورید.

حل: بنا به رابطه (۴) داریم :

$$\mathrm{tr}A = ۱ + (-۲) + ۱ = ۰$$

$$\mathrm{tr}B = ۷ + ۱ + ۹ = ۱۷$$

تعریف ۵.۶ دترمینان تابعی است که از مجموعه ماتریس‌های مربع به مجموعه اعداد (حقیقی یا مختلط) تعریف می‌شود، به عبارت دیگر دترمینان تابعی است که به هر ماتریس مربع یک عدد را نسبت می‌دهد.دترمینان ماتریس A را با نماد $\det A$ یا $|A|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۶ دترمینان وابسته به ماتریس دو در دو

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\det A = |A| = ad - bc \qquad (۵)$$

مثال ۱۴. با استفاده از رابطه (۵) دترمینان‌های زیر را خواهیم داشت :

الف) $\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۴ - ۳ = -۷$

ب) $\begin{vmatrix} ۰ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۰ - (-۴) = ۴$

توجه: دترمینان ماتریسهایی که مرتبه آنها بیشتر از ۲ است به کمک دترمینان زیر ماتریسهای ۲ × ۲ به دست می‌آید، مثال زیر نحوه محاسبه دترمینان چنین ماتریسهایی را نشان می‌دهد.

مثال ۱۵. دترمینان ماتریسهای زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل: دترمینان ماتریس A را به کمک سطر اول به دست می‌آوریم :

$$\det A = ۱\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} - ۳\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix} + ۴\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۱(-۲) - ۳(۱) + ۴(۴ - ۱) = ۷$$

و دترمینان ماتریس B را به کمک ستون دوم به دست می‌آوریم :

$$\det B = -۰\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} + ۱\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} - ۱\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۰ + ۱(-۱) - ۱(۱) = -۲$$

قضیه زیر رابطه بین دترمینان یک ماتریس و وارونپذیر بودن آن را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۶ ماتریس A نامنفرد است (وارونپذیر است) اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۲.۶ دستگاههای معادلات خطی

یکی از مسائلی که اغلب در مسائل مهندسی پیش می‌آید، به دست آوردن جواب یک دستگاه از معادلات خطی است که معمولاً تعداد مجهولات این دستگاهها زیاد است.در این بخش به بررسی

دستگاههای معادلات خطی n معادله n مجهولی می‌پردازیم.چنین دستگاهی به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{۶}$$

که در آن A ماتریسی مربع مرتبه n با مولفه‌های معلوم، $\mathbf{b}$ برداری (ستونی) با n مولفه معلوم و $\mathbf{x}$ یک بردار (ستونی) با n مولفه مجهول می‌باشد.

مثال زیر مثالی را از طرز تشکیل دستگاهی از معادلات مانند (۶) نشان می‌دهد.

مثال ۱۶. درصدد یافتن یک چند جمله‌ای به صورت $P(x) = a + bx + cx^۲$ هستیم که در روابط زیر صدق می‌کند :

$$P(۱) = ۰ \qquad , \qquad P(۲) = -۱ \qquad , \qquad P(۳) = ۲$$

با نوشتن سه شرط فوق به سه معادله زیر می‌رسیم :

$$P(۱) = ۰ \Longrightarrow a + b + c = ۰$$

$$P(۲) = -۱ \Longrightarrow a + ۲b + ۴c = -۱$$

$$P(۳) = ۲ \Longrightarrow a + ۳b + ۹c = ۲$$

لذا یک دستگاه شامل سه معادله و سه مجهول خواهیم داشت که در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \tag{۷}$$

با روشهایی که بعداً بیان خواهیم نمود، جواب دستگاه فوق را می‌توان به دست آورد و این جواب عبارتست از :

$$a = ۵, \quad b = -۷, \quad c = ۲$$

توجه: به سادگی می‌توان بررسی نمود که چند جمله‌ای $P(x) = ۵ - ۷x + ۲x^۲$ از نقاط مورد نظر می‌گذرد.

تعریف ۷.۶ منظور از جواب یک دستگاه از معادلات مانند (۶) به دست آوردن بردار $\mathbf{x}$ است که مولفه‌های آن در تمام معادلات دستگاه صدق می‌کنند.

مثال ۱۷. جواب دستگاه ماتریسی (۷) در مثال قبل عبارتست از بردار زیر

$$\mathbf{x} = [۵, \ -۷, \ ۲]^t$$

در ادامهٔ فصل به روشهای به دست آوردن جواب یک دستگاه از معادلات می‌پردازیم. الگوریتم‌های زیادی برای این موضوع ارائه شده است.که در حالت کلی می‌توان آنهارا به دو دسته زیر تقسیم نمود :

الف.روشهای مستقیم

ب. روشهای تکراری

روشهای مستقیم روشهایی هستند که پس از انجام چند مرحله مشخص به جواب می‌رسیم که این جواب، بدون در نظر گرفتن خطای گرد کردن، جواب دقیق دستگاه است.در حالیکه در روشهای تکراری تنها به یک تقریب از جواب می‌رسیم.

۱.۲.۶ روشهای مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی

در این قسمت حل دستگاههای

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

را در نظر می گیریم، که A ماتریسی مربع مرتبه n و $\mathbf{x}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای nتایی هستند.فرض می‌کنیم که A نامنفرد است و اگر A ماتریسی منفرد باشد در طی عملیات منفرد بودن آن مشخص خواهد شد، در روشهای مستقیم سعی بر این است که دستگاه داده شده از معادلات را به کمک **عملیات سطری مقدماتی** به یک دستگاه معادل ساده‌تر تبدیل کنیم.

عملیات سطری مقدماتی عبارتند از :

۱ـ تعویض دو سطر (یا دو معادله)

۲ـ ضرب یک سطر (یا یک معادله) در عددی مخالف صفر

۳ـ ضرب یک سطر (معادله) در عددی مخالف صفر و جمع نمودن آن با سطری دیگر.

قبل از بیان روشهای مستقیم برای حل دستگاههای معادلات خطی، دستگاه معادلات مثال زیر را که ماتریس ضرایب آن ماتریسی بالا مثلثی است، در نظر بگیرید.همانگونه که این مثال نشان می‌دهد، حل چنین دستگاههایی ساده‌تر می‌باشد.

مثال ۱۸. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ۱۰x_۱ \;-۷x_۲ \;+۰x_۳ = ۷ \\ \qquad\quad ۲/۵x_۲ \;+۵x_۳ = ۲/۵ \\ \qquad\qquad\qquad ۶/۲x_۳ = ۶/۲ \end{cases}$$

دستگاه معادلات را به شکل ماتریسی نوشته و جواب دستگاه را نیز به دست آورید.

حل: دستگاه فوق به شکل ماتریسی عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ & ۰ \\ ۰ & ۲/۵ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶/۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲/۵ \\ ۶/۲ \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن جواب دستگاه از آخرین معادله دستگاه داریم :

$$۶/۲x_۳ = ۶/۲ \Longrightarrow x_۳ = ۱$$

با جایگزین نمودن این مقدار در معادله دوم خواهیم داشت :

$$۲/۵x_۲ + ۵(۱) = ۲/۵ \Longrightarrow x_۲ = -۱$$

نهایتاً، با قرار دادن مقادیر $x_۳$ و $x_۲$ در معادله اول خواهیم داشت :

$$۱۰x_۱ - ۷(-۱) + ۰(۱) = ۷ \Longrightarrow x_۱ = ۰$$

تعریف ۸.۶ دستگاهی مانند دستگاه معادلات مثال ۱۸ که ماتریس ضرایب آن ماتریسی بالا مثلثی است، دستگاه بالا مثلثی نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۶ روش به کار رفته در مثال قبل که برای دستگاههای بالا مثلثی به منظور تعیین جواب مورد استفاده قرار می‌گیرد، **جایگذاری پسرو**(یا جایگذاری از معادله پائینی) نامیده می‌شود.

الگوریتم حل دستگاههای بالا مثلثی :

فرض کنید یک دستگاه بالا مثلثی به صورت زیر داشته باشیم :

$$\begin{aligned}
u_{۱۱}x_۱ + u_{۱۲}x_۲ + \cdots + u_{۱n}x_n &= c_۱ \\
u_{۲۲}x_۲ + \cdots + u_{۲n}x_n &= c_۲ \\
&\vdots \\
u_{nn}x_n &= c_n
\end{aligned}$$

در این صورت جواب دستگاه را به صورت زیر به دست می‌آوریم :

۱- قرار دهید

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

۲- برای $i = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ قرار دهید :

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\{c_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\}$$

همانگونه که مثال ۱۸ نشان می‌دهد، تعیین جواب دستگاههای بالا مثلثی راحت است، از اینرو روشی که ذیلاً توضیح داده می‌شود و روش **حذفی گاوس** نامیده می‌شود، یک دستگاه داده شده را به کمک عملیات سطری مقدماتی به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل می‌کند.پیش از بیان روش حذفی گاوس، در حالت کلی، ابتدا این روند به کمک یک مثال توضیح داده می‌شود.

مثال ۱۹. دستگاه معادلات زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل نموده و سپس جواب دستگاه را به دست آورید.

$$10x_1 - 7x_2 = 7$$

$$5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4$$

حل: شکل ماتریسی دستگاه فوق به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

قدم اول. با استفاده از سطر اول (یا معادله اول دستگاه) ضریب x_1 را در دو معادله دیگر صفر می‌کنیم.برای این منظور $\frac{-5}{10}$ برابر سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم، همچنین $-\frac{-3}{10}$ برابر سطر

اول را با سطر سوم جمع می‌کنیم با انجام این دو عمل، خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ & ۰ \\ ۰ & ۲/۵ & ۵ \\ ۰ & -۰/۱ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲/۵ \\ ۶/۱ \end{bmatrix}$$

قدم دوم. با استفاده از سطر دوم ضریب $x_۲$ را در سطر سوم حذف می‌کنیم. برای این منظور $-\frac{-۰/۱}{۲/۵} = ۰/۰۴$ برابر سطر دوم را با سطر سوم جمع می‌کنیم، با این عمل خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ & ۰ \\ ۰ & ۲/۵ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶/۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲/۵ \\ ۶/۲ \end{bmatrix}$$

دستگاه بالا مثلثی فوق همان دستگاه مثال ۱۸ است، لذا جواب آن عبارتست از :

$$x_۱ = ۰, x_۲ = -۱, x_۳ = ۱$$

تذکر. انجام عملیات مقدماتی سطری بر روی ماتریس افزوده $[A : \mathbf{b}]$ صورت می‌گیرد و نیازی به تکرار دستگاه در هر مرحله نیست.

الگوریتم روش حذفی گاوس :

فرض کنید ماتریس افزوده دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ به صورت زیر باشد

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{۱۱}^{(۱)} & a_{۱۲}^{(۱)} & \cdots & a_{۱n}^{(۱)} & b_۱^{(۱)} \\ a_{۲۱}^{(۱)} & a_{۲۲}^{(۱)} & \cdots & a_{۲n}^{(۱)} & b_۲^{(۱)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱}^{(۱)} & a_{n۲}^{(۱)} & \cdots & a_{nn}^{(۱)} & b_n^{(۱)} \end{array}\right]$$

مرحله یک. با فرض $a_{11}^{(1)} \neq 0$ سطر اول ماتریس را در $l_{i1} = -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ ضرب نموده و با سطر iام برای $i = 2, 3, \cdots, n$ جمع می‌کنیم[1]. این عمل دستگاه معادل زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & \vdots & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

که در آن برای $i, j = 2, 3, \cdots, n$ داریم:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}$$

مرحله دو. حال با فرض $a_{22}^{(2)} \neq 0$ سطر دوم را در $l_{i2} = -\dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ ضرب نموده و با سطر iام برای $i = 3, 4, \cdots, n$ جمع می‌کنیم. این عمل دستگاه معادل زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & \vdots & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & \vdots & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

---

۱) درصورتی که $a_{11}^{(1)} = 0$، جای سطر اول را با سطر دیگری که عضو اول آن مخالف صفر باشد تعویض می‌کنیم

که در آن برای $i, j = ۳, ۴, \cdots, n$ داریم:

$$a_{ij}^{(۳)} = a_{ij}^{(۲)} - a_{۲j}^{(۲)} \frac{a_{i۲}^{(۲)}}{a_{۲۲}^{(۲)}}$$
$$b_i^{(۳)} = b_i^{(۲)} - \frac{a_{i۲}^{(۲)}}{a_{۲۲}^{(۲)}} b_۲^{(۲)}$$

مرحله تکرار. عملیات فوق را تا جایی که ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شود، ادامه می‌دهیم.

تذکر. همانگونه که الگوریتم قبل نشان می‌دهد، برای انجام مرحله iام بایستی $a_{ii}^{(i)}$ مخالف صفر باشد، هرگاه عضو قطری (یا محوری) در مرحله‌ای صفر باشد، کافی است با تعویض دو سطر از ماتریس افزوده به یک عضو قطری غیر صفر در آن مرحله برسیم.

مثال ۲۰. دستگاه معادلات زیر را به کمک روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲ + \frac{۱}{۳}x_۳ = ۱ \\ \frac{۱}{۲}x_۱ + \frac{۱}{۳}x_۲ + \frac{۱}{۴}x_۳ = ۰ \\ \frac{۱}{۳}x_۱ + \frac{۱}{۴}x_۲ + \frac{۱}{۵}x_۳ = ۰ \end{cases}$$

حل: با قرار دادن $l_{۲۱} = -\frac{۱}{۲}$ و $l_{۳۱} = -\frac{۱}{۳}$، ضرب $l_{۲۱}$ در معادله اول و اضافه نمودن حاصل با معادله دوم و همچنین ضرب $l_{۳۱}$ در معادله اول و افزودن آن به معادله سوم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲ + \frac{۱}{۳}x_۳ = ۱ \\ \qquad \frac{۱}{۱۲}x_۲ + \frac{۱}{۱۲}x_۳ = -\frac{۱}{۲} \\ \qquad \frac{۱}{۱۲}x_۲ + \frac{۴}{۴۵}x_۳ = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

سپس با ضرب نمودن معادله دوم در $l_{32} = -1$ و افزودن حاصل به معادله سوم به دستگاه بالا مثلثی زیر خواهیم رسید :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \qquad \frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{12}x_3 = -\frac{1}{2} \\ \qquad\qquad \frac{1}{180}x_3 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

به کمک روش جایگذاری پسرو خواهیم داشت :

$$x_3 = 30, \quad x_2 = -36, \quad x_1 = 9$$

محورگیری

رابطه زیر را که مربوط به خطای حاصل ضرب دو عدد a و b می‌باشد، در نظر بگیرید :

$$e_{ab} \leq b e_a + a e_b \qquad (8)$$

رابطه فوق همان رابطه (۳) فصل اول می‌باشد.رابطه (۸) نشان می‌دهد که هرگاه a و یا b اعدادی بزرگ باشند، خطای حاصل ضرب این دو عدد می‌تواند بزرگ باشد، حتی اگر e_a و e_b مقادیر کوچکی باشند.اما هرگاه $|a|, |b| \leq 1$ مقدار خطای عبارت سمت راست در رابطه (۸) در حد قابل قبول و نزدیک مقادیر e_a و e_b خواهد بود.لذا بایستی حتی الامکان از اعداد تقریبی بزرگ (بزرگتر از یک) اجتناب کنیم. برای توضیح مشکلاتی که در این مورد می‌تواند پیش آید مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲۱. جواب دستگاه زیر را به کمک روش حذفی گاوس و جایگذاری پسرو به دست آورید.محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

حل: برای حذف x_1 از معادله دوم، بایستی معادله اول را در $l_{21} = -\frac{1}{10^{-5}}$ ضرب نموده با معادله دوم جمع کنیم، در این صورت چون $l_{21} = -10^{5}$، دستگاه بالا مثلثی حاصل عبارتست از :

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 & = 1 \\ (1 - 10^{5})x_2 & = 2 - 10^{5} \end{cases}$$

در این صورت با $4D$ مقدار x_2 برابر است با :

$$x_2 = 1/0000$$

با قرار دادن مقدار x_2 در معادله اول خواهیم داشت :

$$10^{-5}x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$$

بنابراین جواب دستگاه بایستی به صورت $[0, 1]^t$ باشد.

مثال ۲۲. در مثال قبل جای دو معادله را تعویض نموده و مجدداً جواب دستگاه را با $4D$ به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

با قرار دادن $l_{21} = -10^{-5}$ و انجام عملیات لازم، دستگاه بالا مثلثی زیر را خواهیم داشت :

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$(1 - 10^{-5})x_2 = 1 - 2(10^{-5})$$

بنابراین با $4D$ خواهیم داشت $x_2 = 1$ و از آن با قرار دادن در معادله اول خواهیم داشت :

$$x_1 = 1$$

لذا جواب معادله به صورت $[۱, ۱]^t$ می‌باشد.

تذکر. علت نادرست بودن جواب به دست آمده در مثال ۲۱ بزرگ بودن $l_{۲۱}$ نسبت به سایر ضرایب معادلات می‌باشد، در حالیکه در مثال ۲۲ چون $l_{۲۱}$ مقداری کمتر از یک می‌باشد جواب دقیق مساله به دست آمده است.

همانگونه که مثالهای ۲۱ و ۲۲ نشان می‌دهند، برای صفر نمودن ضرایب x_j در سطرهای $j + ۱$ام تا nام بایستی l_{ij} را به صورت زیر محاسبه نماییم (بنا به الگوریتم روش حذفی گاوس)

$$l_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \qquad , \qquad i = j + ۱, \cdots , n$$

سپس با ضرب l_{ij} در سطر jام و جمع نمودن آن با سطر iام ضریب x_j در سطر iام صفر می‌شود. اما بنا به توضیحات بیان شده بایستی $|l_{ij}| \leq ۱$ و یا بایستی داشته باشیم

$$|a_{jj}| \leq |a_{ij}|, \qquad i = j + ۱, \cdots , n$$

بنابراین هنگامی که بخواهیم ضریب x_j را در سطرهای $j + ۱$ام تا nام صفر کنیم، بایستی معادله‌ای را در سطر jام قرار دهیم که ضریب x_j نسبت به سایر معادلات بیشترین مقدار را از نظر قدر مطلق داشته باشد.

تعریف ۱۰.۶ عمل فوق، یعنی انتقال معادله‌ای به سطر jام که ضریب x_j در آن بیشترین مقدار را از نظر قدر مطلق دارا می‌باشد، **محورگیری** می‌نامیم.

استفاده از وارون ماتریس A برای حل دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

یکی دیگر از روشهای مستقیم برای حل دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ استفاده از وارون ماتریس A می‌باشد. چون فرض کرده‌ایم که در این دستگاهها ماتریس ضرایب نامنفرد است، لذا $A^{-۱}$ موجود است. با ضرب $A^{-۱}$ در طرفین دستگاه خواهیم داشت :

$$A^{-۱}A\mathbf{x} = A^{-۱}\mathbf{b}$$

و از آن

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{۹}$$

نتیجه ۱. هرگاه بردار $\mathbf{b} = 0$ و $|A| \neq 0$، لذا A^{-1} موجود بوده و از آن بنا به رابطه (۹) جواب دستگاه $A\mathbf{x} = 0$ عبارتست از:

$$\mathbf{x} = A^{-1} 0$$

$$\mathbf{x} = 0$$

نتیجه ۲. دستگاه $A\mathbf{x} = 0$ دارای جواب غیر صفر خواهد بود هرگاه A منفرد باشد، یعنی هرگاه $|A| = 0$.

تعریف ۱۱.۶ دستگاهی که بردار سمت راست آن صفر باشد، یعنی دستگاه $A\mathbf{x} = 0$ دستگاه **همگن** نامیده می‌شود.

مثال ۲۳. با استفاده از وارون ماتریس ضرایب، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس ضرایب دستگاه فوق همان ماتریس A مثال ۱۰ می‌باشد، بنابراین از مثال ۱۰ داریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} ۱/۲ & ۱/۲ & -۱/۲ \\ ۱/۴ & -۱/۴ & -۱/۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

لذا، بنا به رابطه (۹) جواب دستگاه عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۲ & ۱/۲ & -۱/۲ \\ ۱/۴ & -۱/۴ & -۱/۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰/۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب دستگاه عبارتست از : $\mathbf{x} = [-۱,\ ۰/۵,\ ۲]^t$

۲.۲.۶ روشهای تکراری حل دستگاههای معادلات خطی

در این قسمت روشهای تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. روشهای تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی، روشهایی مناسب برای به کارگیری کامپیوتر می‌باشند، به ویژه اگر تعداد مولفه‌های صفر ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیاد باشد، روشهای تکراری بر روشهای مستقیم ترجیح داده می‌شوند.معروفترین روشهای تکراری عبارتند از :

۱- روش ژاکوبی ۲- روش گاوس-سایدل

در این روشها، x_i را از حل معادله iام به دست می‌آوریم، بنابراین دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{aligned} x_۱ &= \cdots \\ x_۲ &= \cdots \\ &\vdots \\ x_n &= \cdots \end{aligned}$$

فرض کنید دستگاهی از معادلات خطی شامل سه معادله معادله و سه مجهول به شکل زیر داشته باشیم :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

هرگاه $a_{11} \neq 0$، $a_{22} \neq 0$ و $a_{33} \neq 0$ در این صورت دستگاه (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\
x_2 &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\
x_3 &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

یک تقریب اولیه از جواب به صورت $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^t$ در نظر می‌گیریم.

حال با مفروضات بیان شده به توضیح روشهای ژاکوبی و گاوس-سایدل می‌پردازیم.

روش ژاکوبی

با قرار دادن $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ و $x_3^{(0)}$ در معادلات دستگاه (۱۱) یک تقریب جدید از جواب به صورت زیر به دست می‌آید.تقریب جدید را با $\mathbf{x}^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]^t$ نشان می‌دهیم.که

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) \\
x_2^{(1)} &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}) \\
x_3^{(1)} &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)})
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

این عمل یک تکرار را کامل می‌کند.حال می‌توانیم با استفاده از مقادیر جدید $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ و $x_3^{(1)}$ یک تقریب دیگر برای جواب به دست آوریم در حالت کلی با در دست داشتن تقریب

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ و $x_3^{(k)}$ جواب جدید $\mathbf{x}^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}]^t$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2 \cdots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

دستگاه (۱۳) **دستگاه تکرار ژاکوبی** برای به دست آوردن جواب دستگاه اولیه (۱۰) می‌باشد.

مثال ۲۴. با استفاده از روش تکراری ژاکوبی جواب دستگاه معادلات زیر را به دست آورید.جواب اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید و محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\
x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 9 \\
-x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

حل: با به دست آوردن x_1 از معادله اول، x_2 از معادله دوم و x_3 از معادله سوم خواهیم داشت :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3) \\
x_2 &= \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3) \\
x_3 &= \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2)
\end{aligned}
$$

لذا با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$، دستگاه تکرار ژاکوبی به صورت زیر خواهد بود :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)})
\end{aligned}
$$

برای $k=0$ خواهیم داشت:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(9 - 0 - 0) = 1/5$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}) = \frac{1}{5}(2 + 0 + 0) = 0/4$$

حال برای $k=1$ تقریب بعدی جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(4 + 1/5 - 0/4) = 1/2750$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(9 - 1 - 0/8) = 1/2000$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) = \frac{1}{5}(2 + 1 + 3) = 1/2000$$

جوابهای فوق و جوابهای بعدی در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱/۰۰۰۰	۱/۵۰۰۰	۰/۴۰۰۰
۲	۱/۲۷۵۰	۱/۲۰۰۰	۱/۲۰۰۰
۳	۱/۰۰۰۰	۰/۸۸۷۵	۱/۱۳۵۰
۴	۰/۹۳۸۱	۰/۹۵۵۰	۱/۰۵۴۰
۵	۰/۹۷۵۳	۰/۹۹۲۳	۱/۰۰۹۲
۶	۰/۹۹۵۸	۱/۰۰۱۱	۰/۹۹۲۰
۷	۱/۰۰۲۳	۱/۰۰۳۴	۰/۹۹۹۶
۸	۱/۰۰۱۰	۰/۹۹۹۸	۱/۰۰۱۸
۹	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۲	۱/۰۰۰۹
۱۰	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۶
۱۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۲	۰/۹۹۹۸
۱۲	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱
۱۳	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۱
۱۴	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

لذا جواب در تکرار چهاردهم به صورت

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

به دست آمده است (توجه دارید که محاسبات را با $4D$ انجام داده‌ایم).

روش گاوس-سایدل

روش تکراری گاوس-سایدل همانند روش تکراری ژاکوبی است، با این تفاوت که از هر مقدار جدید به دست آمده از مولفه‌های جواب، در محاسبه سایر مولفه‌ها استفاده می‌کند. برای توضیح این روش دستگاه (۱۲) را در نظر بگیرید، پس از محاسبه $x_1^{(1)}$ از اولین معادله این دستگاه بر حسب بقیه x_iها، از این مقدار در محاسبه $x_2^{(1)}$ استفاده می‌کنیم، لذا $x_2^{(1)}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)})$$

حال با داشتن $x_1^{(1)}$ و $x_2^{(1)}$ مولفه $x_3^{(1)}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم :

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)})$$

این عمل یک تکرار روش گاوس-سایدل را کامل می‌کند، حال با داشتن مقادیر $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ و $x_3^{(1)}$ تکرار بعدی را انجام می‌دهیم.در حالت کلی با در دست داشتن $x_1^{(k)}$، $x_2^{(k)}$ و $x_3^{(k)}$ جواب بعدی را به صورت زیر به دست می‌آوریم :

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}), k = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{14}$$

دستگاه (۱۴) **دستگاه تکرار گاوس-سایدل** برای به دست آوردن جواب دستگاه اولیه (۱۰) می‌باشد.

مثال ۲۵. جواب دستگاه معادلات مثال ۲۴ را با استفاده از روش تکراری گاوس-سایدل به دست

آورید. محاسبات را با $4D$ انجام دهید و بردار اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید.

حل: با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ دستگاه تکرار گاوس-سایدل برای این مساله عبارتست از:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})$$

بنابراین برای $k = 0$ خواهیم داشت:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + 0 + 0) = 1$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - 1 - 0) = \frac{4}{3}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(2 + 1 + \frac{8}{3}) = \frac{17}{15}$$

جواب فوق و جوابهای بعدی در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱٫۰۰۰۰	۱٫۳۳۳۳	۱٫۱۳۳۳
۲	۱٫۰۵۰۰	۰٫۹۴۷۳	۰٫۹۸۸۹
۳	۰٫۹۸۹۶	۱٫۰۰۵۰	۰٫۹۹۹۹
۴	۱٫۰۰۱۰	۰٫۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰
۵	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰

لذا جواب در تکرار پنجم به صورت زیر به دست آمده است:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

نکته: همانگونه که مثال ۲۵ نشان می‌دهد، روش تکراری گاوس‌ـسایدل سریعتر از روش ژاکوبی به جواب می‌رسد، البته مثالهای خاصی وجود دارند که چنین نیست، اما در اکثر موارد روش گاوس‌ـسایدل بهتر از روش ژاکوبی است یعنی سریعتر به جواب می‌رسد.(البته هیچکدام از این دو روش، تضمین همگرایی ندارند.)

تذکر ۱. برای تشکیل دستگاههای تکراری ژاکوبی یا گاوس‌ـسایدل بایستی در معادله iام داشته باشیم $a_{ii} \neq 0$ تا بتوانیم x_i را از آن معادله به دست آوریم، اما هرگاه $a_{ii} = 0$، چنین کاری امکانپذیر نیست، برای رفع این مشکل کافی است دو سطر را جابجا کنیم و معادله‌ای را در سطر iام قرار دهیم که $a_{ii} \neq 0$.

تذکر ۲. بنا به مطالب بیان شده در قسمت محورگیری بهتر است معادله‌ای را در سطر iام قرار دهیم که $|a_{ii}|$ درمیان سطرهای دیگر بیشترین مقدار را داشته باشد، همانگونه که برای مثال‌های ۲۴ و ۲۵ عمل شد، در این مثالها ضریب x_1 در معادله اول بیشترین مقدار را در میان معادلات دیگر دارد و همچنین ضریب x_2 در معادله دوم و ضریب x_3 در معادله سوم دارای خاصیت مورد نظر هستند.

تذکر ۳. حل یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول مشابه حالت سه متغیره است که بیان شد.مثلاً در روش گاوس‌ـسایدل با فرض $a_{ii} \neq 0$ برای $i = 1, 2, \cdots, n$ تقریب $(k+1)$ام مولفه x_i به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - a_{i2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)}], \; i = 1, 2, \cdots, n$$

یا

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \qquad 1 \leq i \leq n$$

شرط توقف عملیات

عملیات محاسبه x_iها تاجایی انجام می‌شود که برای تمام iها $x_i^{(k+1)}$ و $x_i^{(k)}$ به اندازه کافی به هم نزدیک باشند، برای این منظور هرگاه قرار دهیم :

$$M^{(k)} = \max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|, \quad i = 1, \cdots, n\}$$

و بخواهیم جواب دستگاه را با تقریب مقدار معلوم ϵ به دست آوریم، هرگاه شرط زیر برقرار شد عملیات را خاتمه می‌دهیم :

$$M^{(k)} < \epsilon \tag{۱۵}$$

شرط (۱۵) نشان دهندهٔ این است که تمام مولفه‌های نظیر از جواب در دو تکرار متوالی به اندازه کافی به هم نزدیک می‌باشند.

۳.۶ دستگاههای معادلات غیر خطی

در این قسمت یکی از روشهای حل دستگاههای معادلات غیر خطی را بررسی می‌کنیم.برای سادگی دستگاههای شامل دو معادله را در نظر می‌گیریم.فرض کنید هدف تعیین یکی از جوابهای دستگاه زیر باشد :

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

که در آن f و g توابع معلوم و غیر خطی از متغیرهای x و y می‌باشند.هرگاه (α,β) جواب مورد نظر دستگاه باشد و (x_0,y_0) تقریبی از (α,β)، می‌توان نوشت :

$$\alpha = x_0 + h_0$$

$$\beta = y_0 + k_0$$

اگر بتوان h_0 و k_0 را محاسبه نمود، با افزودن آنها به ترتیب به x_0 و y_0 به جواب مطلوب میرسیم.لذا سعی می‌کنیم تقریبهایی از h_0 و k_0 به دست آوریم، برای این منظور از بسط تیلور یک تابع دو

متغیره خواهیم داشت :

$$
\begin{aligned}
f(\alpha,\beta) &= f(x_0+h_0, y_0+k_0)\\
&= f(x_0,y_0) + h_0\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + k_0\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\\
&+ h_0^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + k_0^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

اگر x_0 و y_0 تقریبهای خوبی از α و β باشند، h_0 و k_0 کوچک خواهند بود و می‌توان از جملاتی که توان h_0 و k_0 در آنها بیش از یک است، صرفنظر کرد.بنابراین با توجه به اینکه $f(\alpha,\beta)=0$ و (x_0,y_0) تقریب (α,β) هستند، می‌توان نوشت :

$$0 \simeq f(x_0,y_0) + h_0\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + k_0\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \tag{۱۶}$$

و به همین صورت برای تابع g به دست می‌آید :

$$0 \simeq g(x_0,y_0) + h_0\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + k_0\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \tag{۱۷}$$

از دو رابطه (۱۶) و (۱۷) برای پیدا کردن h_0 و k_0 دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$
\begin{cases}
-f(x_0,y_0) = h_0\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + k_0\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\\
-g(x_0,y_0) = h_0\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + k_0\dfrac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}
\end{cases} \tag{۱۸}
$$

هرگاه دترمینان ضرائب دستگاه (۱۸) مخالف صفر باشد می‌توان از آن h_0 و k_0 را به دست آورد.

دترمینان ضرایب این دستگاه عبارتست از :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

که بایستی به ازای (x_0,y_0) غیر صفر باشد، یعنی بایستی داشته باشیم :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)} \neq 0 \tag{۱۹}$$

هرگاه (۱۹) برقرار باشد، با استفاده از **دستور کرامر** می‌توانیم h_0 و k_0 را از دستگاه (۱۸) به صورت زیر به دست آوریم :

$$h_0 = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} \quad , \quad k_0 = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}$$

که در آن $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$، $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ و به طور مشابه برای g.همچنین مقادیر توابع و مشتقات آنها بایستی در (x_0, y_0) محاسبه شوند.با به دست آوردن h_0 و k_0 مقدار $x_0 + h_0$ تقریب بهتری از x_0 برای α و مقدار $y_0 + k_0$ تقریب بهتری از y_0 برای β خواهد بود، لذا قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h_0 \\ y_1 = y_0 + k_0 \end{cases}$$

و عمل فوق را برای x_1 و y_1 به جای x_0 و y_0 تکرار می‌کنیم و تقریبهای x_2 و y_2 را به دست می‌آوریم.در حالت کلی اگر x_n و y_n محاسبه شده باشند، با حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} h_n \dfrac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} = -f(x_n, y_n) \\ h_n \dfrac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial x} + k_n \dfrac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial y} = -g(x_n, y_n) \end{cases} \qquad (۲۰)$$

و به دست آوردن h_n و k_n قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + k_n \end{cases}$$

در این حالت نیز واضح است که دستگاه (۲۰) جواب دارد، هرگاه داشته باشیم :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{(x_n,y_n)} \neq 0 \qquad (۲۱)$$

معمولاً برای برقرار بودن رابطه (۲۱) در (x_n, y_n) برای تمام nها سعی می‌کنیم قبل از محاسبات ثابت کنیم که در یک همسایگی از (α, β) رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial x} \neq 0$$

شرایط توقف عملیات

معمولاً ترکیبی از شرایط زیر را به منظور توقف عملیات برای محاسبه جواب با تقریب مقدار معلوم ϵ مورد استفاده قرار می‌دهیم:

$$|x_{n+1}-x_n|<\epsilon \quad , \quad |y_{n+1}-y_n|<\epsilon$$

$$|f(x_n,y_n)|<\epsilon \quad , \quad |g(x_n,y_n)|<\epsilon$$

مثال ۲۶. تقریبی از جواب دستگاه زیر چنان به دست آورید که داشته باشیم :

$$|x_{n+1}-x_n|<10^{-2} \quad , \quad |y_{n+1}-y_n|<10^{-2}$$

محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

$$\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

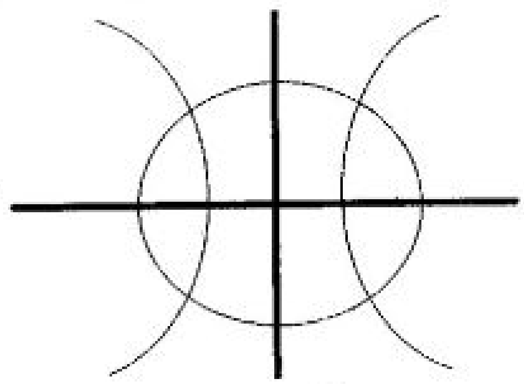
حل: در این مثال واضح است که می‌توان x^2 را از یک معادله به دست آورد و در دیگری قرار داد و y^2را به دست آورد و نهایتاً x و y را پیدا نمود.ولی هدف از این مثال نشان دادن این نکته است که روش بیان شده چگونه مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تعیین یک تقریب اولیه از یکی از جوابهای

دستگاه فوق، (در صورت امکان) منحنیهای $f(x,y) = ۰$ و $g(x,y) = ۰$ را رسم می‌کنیم، طول و عرض محل تلاقی آنها جوابهای مورد نظر هستند.در این مثال داریم :

$$f(x,y) = x^۲ - y^۲ - ۵$$

$$g(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲۵$$

رسم نمودار توابع فوق در یک دستگاه مختصات به صورت زیر خواهد بود :



از شکل فوق مشخص می‌شود که دستگاه دارای چهار جواب است و هرگاه مختصات جواب واقع در ربع اول را (α,β) بنامیم، بقیه جوابها به صورت زیر هستند :

$$(\alpha,-\beta), \quad (-\alpha,\beta), \quad (-\alpha,-\beta)$$

ضمناً مقادیر $x. = ۴$ و $y. = ۳$ تقریبهای اولیه مناسبی از α و β هستند، هرگاه بخواهیم در حالت کلی h_n و k_n را محاسبه کنیم، داریم :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۲x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -۲y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = ۲x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = ۲y$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial x} = ۸xy$$

و با توجه به اینکه $۴ > \alpha > ۳$ و $۴ > \beta > ۳$ همسایگی (α, β) را مستطیل $۳ \leq x, y \leq ۴$ می‌گیریم، لذا در این همسایگی از (α, β) داریم :

$$۸xy \geq ۷۲ \neq ۰$$

لذا h_n و k_n را از تمام دستگاههای به صورت دستگاه (۲۰) می‌توان به دست آورد. با توجه به مقادیر محاسبه شده فوق دستگاه (۲۰) به صورت زیر می‌باشد :

$$\begin{cases} ۲x_n h_n - ۲y_n k_n = -(x_n^۲ - y_n^۲ - ۵) \\ ۲x_n h_n + ۲y_n k_n = -(x_n^۲ + y_n^۲ - ۲۵) \end{cases}$$

و از آن داریم :

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -x_n^۲ + y_n^۲ + ۵ & -۲y_n \\ -x_n^۲ - y_n^۲ + ۲۵ & ۲y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲x_n & -۲y_n \\ ۲x_n & ۲y_n \end{vmatrix}} = \frac{-۴x_n^۲ y_n + ۶۰ y_n}{۸x_n y_n} = \frac{-x_n^۲ + ۱۵}{۲x_n}$$

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} ۲x_n & -x_n^۲ + y_n^۲ + ۵ \\ ۲x_n & -x_n^۲ - y_n^۲ + ۲۵ \end{vmatrix}}{۸x_n y_n} = \frac{-۴x_n y_n^۲ + ۴۰ x_n}{۸x_n y_n} = \frac{-y_n^۲ + ۱۰}{۲y_n}$$

لذا از اینکه داریم

$$\begin{cases} x_{n+۱} = x_n + h_n \\ y_{n+۱} = y_n + k_n, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \cdots \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای h_n و k_n خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{15 - x_n^2}{2x_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{10 - y_n^2}{2y_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

با تقریب اولیه $(x_0, y_0) = (4, 3)$ مقادیر بعدی جواب به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} x_1 = 3.8750 \\ y_1 = 3.1667 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3.8730 \\ y_2 = 3.1623 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3.8730 \\ y_3 = 3.1623 \end{cases}$$

بنابراین $(\alpha, \beta) = (x_3, y_3)$.

۴.۶ به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد

در این قسمت طرز به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد را به کمک اعمال سطری مقدماتی بیان می‌کنیم.هرگاه ماتریس وارون‌پذیر A به وسیله یک سلسله اعمال مقدماتی تبدیل به ماتریس واحد شود، آن گاه با انجام همین سلسله اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس واحد، وارون ماتریس A به دست می‌آید.برای به دست آوردن وارون ماتریس A، معمولاً اعمال سطری مقدماتی

را به طور همزمان بر روی ماتریس A و ماتریس واحد انجام می‌دهیم. لذا ماتریس افزوده $[A \vdots I]$ را در نظر گرفته و با انجام یک سلسله اعمال سطری مقدماتی، آن را تبدیل به $[I \vdots B]$ می‌نماییم که در آن $B = A^{-1}$. انجام عمل فوق را به کمک یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۲۷. وارون ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: داریم :

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

با تعویض سطر اول و دوم خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حال ۱ − برابر سطر اول را با سطر سوم جمع نموده، در سطر سوم قرار می‌دهیم :

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

سه برابر سطرِ سوم را با سطر اول جمع نموده در سطر اول قرار می‌دهیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

سطر دوم را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

سطر دوم را با سطر سوم جمع نموده، حاصل را در سطر سوم قرار می‌دهیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

(-3) برابر سطر سوم را با سطر دوم جمع نموده، حاصل را در سطر دوم قرار می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

حال سطر سوم را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

لذا وارون ماتریس A عبارتست از :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

تذکر. هرگاه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد، تبدیل آن به ماتریس واحد امکانپذیر نیست.

مثال ۲۸. نشان دهید ماتریس زیر وارون‌پذیر نیست.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: با انجام عملیاتی مشابه عملیات مثال ۲۷ داریم :

$$[A\vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

چون تمام عناصر سطر سوم A به وسیله اعمال سطری مقدماتی تبدیل به صفر شدند، لذا A ماتریسی منفرد است، بنابراین A را نمی‌توان به ماتریسی واحد تبدیل نمود، در نتیجه A وارون‌پذیر نیست.

توجه: یک روش دیگر برای به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد استفاده از قضیه **کیلی-هامیلتون** است که در فصل بعد توضیح داده خواهد شد.

مجموعه مسائل فصل ششم

۱- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس به دست آورید.

$$x_1 + ۰/۶۷x_2 + ۰/۳۳x_3 = ۲$$

$$۰/۴۵x_1 + x_2 + ۰/۵۵x_3 = ۲$$

$$۰/۶۷x_1 + ۰/۳۳x_2 + x_3 = ۲$$

جواب. $\mathbf{x} = [۱, ۱, ۱]^t$

۲- جواب دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را به روش حذفی گاوس به دست آورید که در آن A و $\mathbf{b}$ به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

جواب. $\mathbf{x} = [\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}]^t$

۳- با روش حذفی گاوس جواب معادلات زیر را به دست آورید.

$$x - y + z = -۴$$

$$۵x - ۴y + ۳z = -۱۲$$

$$۲x + y + z = ۱۱$$

جواب. $z = -۱, y = ۶, x = ۳$

۴- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس به دست آورید.

$$۲x + ۶y - z = -۱۲$$

$$۵x - y + ۲z = ۲۹$$

$$-۳x - ۴y + z = ۵$$

جواب. $z = ۶, y = -۲, x = ۳$

۵- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس به دست آورید.

$$(۲ + ۳i)x + (۲ - i)y = ۲ + i$$

$$(۴ + ۶i)x + (۳ - ۶i)y = -۲ - ۵i$$

جواب. $y = ۲ - i, x = ۱ + i$

۶- یکی از روشهای مستقیم برای حل دستگاههای معادلات خطی، روش **گاوس-ژردن** است که در آن به کمک اعمال سطری مقدماتی، ماتریس ضرائب دستگاه را به یک ماتریس قطری تبدیل می‌کنیم و سپس با به دست آوردن دستگاهی از معادلات به صورت زیر جواب دستگاه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{llll} u_{۱۱}x_۱ & & & = c_۱ \\ & u_{۲۲}x_۲ & & = c_۲ \\ & & \ddots & \\ & & u_{nn}x_n & = c_n \end{array}$$

بنابراین جواب دستگاه عبارتست از:

$$x_i = \frac{c_i}{u_{ii}} \quad , \quad i = ۱, \cdots, n$$

الگوریتم مورد نیاز را برای تبدیل ماتریس ضرایب به یک ماتریس قطری بنویسید.

۷- جواب مسائل ۱ تا ۵ را به کمک الگوریتم گاوس-ژردن به دست آورید.

۸- نشان دهید روش حذفی گاوس نمی‌تواند دستگاه معادلات زیر را حل کند و از آن نتیجه بگیرید که ماتریس ضرائب دستگاه ماتریسی منفرد است.

$$x + ۲y - z = -۷$$

$$-۳x + ۴y + ۵z = ۱/۵$$

$$-۴x + ۲y + ۶z = ۰$$

۹- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس و بدون محورگیری به دست آورید.محاسبات را با $(۵D)$ انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ & ۰ \\ -۳ & ۲/۰۹۹ & ۶ \\ ۵ & -۱ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۳/۹۰۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

جواب. $\mathbf{x} = [-۰/۳۵, -۱/۵۰, ۰/۹۹۹۹۳]^t$

۱۰- جواب دستگاه مساله ۹ را با روش حذفی گاوس و انجام عمل محورگیری به دست آورید.

جواب. $\mathbf{x} = [۰, -۱, ۱]^t$

۱۱- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس یک بار بدون عمل محورگیری و بار دیگر با انجام محورگیری به دست آورید.محاسبات را با $۴D$ انجام دهید.

$$x + ۵۹۲y = ۴۳۷$$

$$۵۹۲x + ۴۳۰۸y = ۲۲۵۱$$

جواب.بدون محورگیری $y = ۰/۷۴۰۶, x = -۱/۴$

با محورگیری $y = ۰/۷۴۰۹, x = -۱/۵۹۰$

۱۲- دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 \quad &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

قرار دهید : $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^t$ و تقریبی از جواب دستگاه در تکرار پنجم به روش ژاکوبی به دست آورید. محاسبات را با $(4D)$ انجام دهید.

جواب. $\mathbf{x}^{(5)} = [0/9890, 2/0114, -1/0103, 1/0214]^t$

۱۳- تقریبی از جواب دستگاه مسأله ۱۲ را با خطای 10^{-3} و به روش ژاکوبی به دست آورید.

جواب. $\mathbf{x}^{(10)} = [1/0001, 1/9998, -0/9998, 0/9998]^t$

۱۴- جواب دستگاه مسأله ۱۲ را به روش تکراری گاوس-سایدل در تکرار پنجم به دست آورید. محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

جواب. $\mathbf{x}^{(5)} = [1/0001, 2/0000, -1/0000, 1/0000]^t$

۱۵- جواب دستگاه زیر را به روش تکراری گاوس-سایدل به دست آورید.

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 \qquad\qquad &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

جواب. جواب دقیق عبارتست از : $\mathbf{x} = [0/8, 0/6, 0/4, 0/2]^t$

۱۶- به روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل جواب دستگاه زیر را به دست آورید.(از یک برنامه

کامپیوتری استفاده کنید.)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0\\
x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 &= 0\\
x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 &= 0\\
x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

جواب. جواب دقیق عبارتست از :

$$\mathbf{x} = [5, -10, 10, -5, 1]^t$$

۱۷- جواب دستگاه زیر را به روش گاوس-سایدل به دست آورید، به طوری که اختلاف بین x، y و z در دو تکرار متوالی کمتر از ۰٫۰۲ گردد.

$$
\begin{aligned}
10x + 2y + 6z &= 28\\
x + 10y + 9z &= 7\\
2x - 7y - 10z &= -17
\end{aligned}
$$

جواب. $z = 3.994,\ y = -2.990,\ x = 1.003$

۱۸- وارون ماتریس A را در صورت وجود به دست آورید هرگاه داشته باشیم :

الف) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ ، ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

جواب.الف. $A^{-1} = A$، ب. $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 3/5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

پ. A وارون‌پذیر نیست. ت. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

۱۹- به کمک وارون ماتریس ضرایب دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را حل کنید هرگاه داشته باشیم $\mathbf{b} = [5, -5, 0]^t$ و

الف. A ماتریس قسمت الف در مساله ۱۸ باشد.

ب. A ماتریس قسمت ب در مساله ۱۸ باشد.

پ. A ماتریس قسمت ت در مساله ۱۸ باشد.

جواب.الف. $\mathbf{x} = [10, -10, 5]^t$. ب. $\mathbf{x} = [5, 0, 0]^t$. پ. $\mathbf{x} = [-25, -2/5, -12/5]^t$

۲۰- دستگاههای غیرخطی زیر را حل کنید. (جواب را $7D$ به‌دست آورید)

الف.

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = -8 \\ xy^2 + x - 10y = -8 \end{cases}$$

ب.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 3xy^2 - x^3 = 1 \end{cases}$$

جواب. الف. $x = 1$ و $y = 1$

ب. $x = 0/5$ و $y = 0/8660254$

فصل هفتم

تعیین مقادیر ویژه ماتریسها

۱.۷ مقدمه

حل بسیاری از مسائل فیزیک و ریاضی مستلزم یافتن و یا حداقل تخمین مقادیری از λ است که به ازای بردار مخالف صفر $\mathbf{x}$، در معادله $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ صدق کند که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و λ یک عدد (حقیقی یا مختلط) است. این فصل به بررسی تعیین چنین λ و $\mathbf{x}$ی می‌پردازد.در این فصل $\mathbb{R}$ را مجموعه اعداد حقیقی و $\mathbb{C}$ را مجموعه اعداد مختلط در نظر می‌گیریم.

۲.۷ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنید A یک ماتریس مربع و $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ یک دستگاه معادلات خطی باشد که λ یک مقدار ثابت و $\mathbf{x} \neq \circ$ یکی از دسته جوابهای دستگاه باشد.از $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ داریم : $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$

که در آن I ماتریس واحد هم مرتبه با ماتریس A است، بنابراین :

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0 \qquad (۱)$$

معادله (۱) یک دستگاه معادلات خطی همگن با ماتریس ضرایب $\lambda I - A$ می‌باشد و بنا به مطلب بیان شده در فصل ششم می‌دانیم شرط آن که دستگاه همگن (۱) دارای جواب غیر صفر باشد، آن است که دترمینان ضرائب دستگاه برابر صفر باشد.به عبارت دیگر داشته باشیم

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = 0 \qquad (۲)$$

هر گاه A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد، بسط دترمینان (۲) را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای درجهٔ n برحسب λ بیان نمود که آن را با $f(\lambda)$ نشان می‌دهیم، بنابراین خواهیم داشت :

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \qquad (۳)$$

با توجه به مطلب فوق، تعریف زیر را داریم :

تعریف ۱.۷ معادله (۳) **معادله مفسر** یا **معادلهٔ مشخصه** ماتریس A نامیده می‌شود، ریشه‌های معادله مشخصه را **مقادیر ویژه** ماتریس A می‌نامیم.

هرگاه λ یک مقدار ویژه A باشد، در این صورت یک بردار غیر صفر $\mathbf{x}$ وجود دارد به طوری که

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

بردار $\mathbf{x}$ را **بردار ویژه** A نظیر λ می‌نامیم.

مثال ۱. بردار $\mathbf{x} = [1, 2]^t$ یک بردار ویژهٔ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ متناظر با مقدار ویژه

$\lambda = ۳$ می‌باشد، زیرا داریم :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۸ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

$$= ۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۳\mathbf{x}$$

خصوصیات مقادیر ویژه

هرگاه λ یک مقدار ویژه A و $\mathbf{x}$ بردار ویژه نظیر λ باشد، در این صورت داریم :

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

بنابراین خواص زیر را خواهیم داشت :

خصوصیت ۱. هرگاه $۰ \neq \alpha \in \mathbb{C}$ عددی ثابت باشد در این صورت $\alpha\mathbf{x}$ نیز بردار ویژه A نظیر λ است، زیرا از $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ داریم :

$$\alpha A\mathbf{x} = \alpha\lambda\mathbf{x}$$

و از آن

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x})$$

بنابراین $\alpha\mathbf{x}$ یک بردار ویژه A نظیر λ است.

خصوصیت ۲. از $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ داریم :

$$A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x})$$

$$A^۲\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^۲\mathbf{x}$$

بنابراین $A^۲\mathbf{x} = \lambda^۲\mathbf{x}$ که نشان می‌دهد $\mathbf{x}$ بردار ویژه نظیر $\lambda^۲$ برای $A^۲$ است و به استقراء می‌توان نشان داد که λ^k مقدار ویژهٔ A^k است و $\mathbf{x}$ بردار ویژه نظیر آن است.

۳.۷ تعیین چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس

می‌دانیم که

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A است و مقادیر ویژه ماتریس A ریشه‌های چند جمله‌ای فوق می‌باشند.هرگاه مرتبه ماتریس A بالا باشد روش بسط دترمینان $\lambda I - A$ برای تعیین چند جمله‌ای مشخصه روش دقیقی نیست، چراکه λ متغیر بوده و از روشهای کامپیوتری نیز نمی‌توان برای محاسبه دترمینان $\lambda I - A$ استفاده کرد.از طرفی محاسبهٔ دترمینان به روش دستی نیز وقت‌گیر می‌باشد، لذا باید به دنبال روشهای عددی بود که در این گونه موارد بتوان به کمک کامپیوتر چند جمله‌ای مشخصه را محاسبه کرد.

روشهای به دست آوردن مقادیر ویژه ماتریس A با استفاده از چند جمله‌ای مشخصه

در این قسمت سه روش زیر را برای تعیین چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A بدون بسط دترمینان $|\lambda I - A|$ معرفی می‌نماییم که این روشها عبارتند از :

۱.روش ضرائب نامعین

۲.روش کریلف

۳.روش لوری یر

۱.۳.۷ روش ضرائب نامعین برای به دست آوردن چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A

در چند جمله‌ای مشخصه

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

n مجهول داریم که عبارتند از $p_۱, p_۲, \cdots, p_n$.برای تعیین این مجهولات $f(\lambda)$ را در n نقطه حساب می‌کنیم که عبارتند از مقادیر $۰, ۱, \cdots, n-۱$:

$$
\begin{aligned}
&f(۰) = p_n\\
&f(۱) = ۱ + p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n\\
&f(۲) = ۲^n + ۲^{n-۱}p_۱ + ۲^{n-۲}p_۲ + \cdots + ۲p_{n-۱} + p_n\\
&\vdots\\
&f(n-۱) = (n-۱)^n + (n-۱)^{n-۱}p_۱ + (n-۱)^{n-۲}p_۲ + \cdots + (n-۱)p_{n-۱} + p_n
\end{aligned}
$$

که درآنها p_n همان مقدار $f(۰)$ است.بنابراین دستگاه n معادله و n مجهولی زیر را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&p_n = f(۰)\\
&p_۱ + p_۲ + \cdots + p_{n-۱} = f(۱) - f(۰) - ۱\\
&۲^{n-۱}p_۱ + ۲^{n-۲}p_۲ + \cdots + ۲p_{n-۱} = f(۲) - f(۰) - ۲^n\\
&\vdots\\
&(n-۱)^{n-۱}p_۱ + (n-۱)^{n-۲}p_۲ + \cdots + (n-۱)p_{n-۱} = f(n-۱) - f(۰) - (n-۱)^n
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

بنابراین بایستی n دترمینان **عددی** $f(۰), f(۱), \cdots, f(n-۱)$ را حساب کنیم و سپس با حل دستگاه (۴) مقادیر $p_۱, p_۲, \cdots, p_n$ را به دست می‌آوریم و از آنجا چند جمله‌ای مشخصه تعیین می‌شود.

مثال ۲. به روش ضرائب نامعین، مقادیر ویژهٔ ماتریس زیر را به دست آورید.

$$
\begin{bmatrix}
۱ & ۲ & ۱\\
۱ & -۲ & ۰\\
۰ & ۰ & ۱
\end{bmatrix}
$$

حل: داریم $n = ۳$ و از آن مجهولات عبارتند از $p_۱, p_۲, p_۳$.

$$p_۳ = f(۰) = \det(-A) = \begin{vmatrix} -۱ & -۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۴$$

$$f(۱) = \det(I - A) = \begin{vmatrix} ۰ & -۲ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

$$f(۲) = \det(۲I - A) = \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & -۱ \\ -۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲$$

بنابراین دستگاه (۴) به صورت زیر خواهد بود :

$$p_۳ = ۴$$

$$p_۱ + p_۲ = f(۱) - p_۳ - ۱ = ۰ - ۴ - ۱ = -۵$$

$$۲^۲ p_۱ + ۲p_۲ = f(۲) - f(۰) - ۲^۳$$

لذا دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} p_۱ + p_۲ = -۵ \\ ۴p_۱ + ۲p_۲ = -۱۰ \end{cases}$$

و از آن داریم $p_۱ = ۰$ و $p_۲ = -۵$. در نتیجه چند جمله‌ای مشخصه به صورت زیر خواهد بود :

$$f(\lambda) = \lambda^۳ - ۵\lambda + ۴ = ۰$$

$$(\lambda - ۱)(\lambda^۲ + \lambda - ۴) = ۰$$

در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس A عبانتد از :

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$
$$\lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

۲.۳.۷ روش کریلف[1] برای به دست آوردن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A

ابتدا قضیه زیر را که به قضیه کیلی-هامیلتون موسوم است، در نظر بگیرید:

قضیه کیلی-هامیلتون[2]. هرگاه چند جمله‌ای مشخصه A به صورت زیر باشد

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

در این صورت $f(A) = 0$ یعنی هر ماتریس در چند جمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند. بنابراین :

$$A^n + p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + \cdots + p_{n-1}A + p_nI = 0 \qquad (5)$$

که در آن I یک ماتریس همانی از مرتبه n و 0 ماتریس صفر از مرتبهٔ n است.

روش کریلف. در این روش هرگاه V یک بردار دلخواه مخالف صفر باشد از رابطه (۵) داریم :

$$A^nV + p_1A^{n-1}V + p_2A^{n-2}V + \cdots + p_{n-1}AV + p_nV = 0$$

و از آن

$$p_1A^{n-1}V + p_2A^{n-2}V + \cdots + p_{n-1}AV + p_nV = -A^nV \qquad (6)$$

۱) Krylov ۲) Kaly-Hamilton

رابطه (۶) یک دستگاه معادلات خطی به شکل زیر می‌باشد :

$$[A^{n-1}V, A^{n-2}V, \cdots, A^{2}V, AV, V]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = -A^{n}V \qquad (7)$$

بنابراین با حل دستگاه (۷) مجهولات p_1 تا p_n تعیین می‌شوند، به شرط اینکه دترمینان ماتریس ضرایب (۷) صفر نباشد، در غیر اینصورت بایستی بردار اولیه V را عوض نمود.

مثال ۳. چند جمله‌ای مشخصه ماتریس زیر را به روش کریلف به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: داریم $n = 3$ و می‌گیریم $V = [1, -1, 1]^t$ و بایستی دستگاه زیر را تشکیل دهیم :

$$[A^{2}V, AV, V]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = -A^{3}V$$

پس از محاسبهٔ AV، $A^{2}V = A(AV)$ و $A^{3}V = A(A^{2}V)$ خواهیم داشت :

$$AV = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A^{2}V = A\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A^{3}V = A\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۱ \\ -۶ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_۱ \\ p_۲ \\ p_۳ \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -۴ \\ ۱۹ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

هرگاه از روش حذفی گاوس برای حل دستگاه فوق استفاده کنیم به دستگاه بالا مثلثی زیر خواهیم رسید :

$$\begin{aligned} ۷p_۱ \qquad + p_۳ &= ۴ \\ ۳p_۲ - \frac{۱}{۷}p_۳ &= -\frac{۱۰۹}{۷} \\ \frac{۱۹}{۲۱}p_۳ &= \frac{۷۶}{۲۱} \end{aligned}$$

و از آن :

$$p_۳ = ۴, \qquad p_۲ = -۵, \qquad p_۱ = ۰$$

بنابراین چند جمله‌ای مشخصه عبارتست از :

$$f(\lambda) = \lambda^۳ - ۵\lambda + ۴$$

۳.۳.۷ روش لوری‌یر[۱] برای به دست آوردن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A

این روش از این مطلب استفاده می‌کند که اگر λ مقدار ویژه A باشد λ^i مقدار ویژه A^i است.هرگاه فرض کنیم λ_k مقدار ویژهٔ A است و قرار دهیم :

$$S_i = \sum_{k=۱}^{n} \lambda_k^i = \lambda_۱^i + \lambda_۲^i + \cdots + \lambda_n^i$$

در این صورت λ_k^iها مقادیر ویژهٔ A^i هستند.همچنین S_i قابل محاسبه است زیرا می‌توان نشان داد که

$$S_i = \operatorname{tr}(A^i).$$

۱) LeVerrier

به علاوه هرگاه چند جمله‌ای مشخصه A به صورت زیر باشد :

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

رابطه زیر بین S_iها و p_k برقرار است :

$$\begin{cases} p_1 = -S_1 \\ p_k = -\dfrac{1}{k}(S_k + p_1 S_{k-1} + p_2 S_{k-2} + \cdots + p_{k-1}S_1), \qquad k = 2, 3, \cdots, n \end{cases}$$

لذا با استفاده از رابطه بازگشتی فوق و داشتن p_1 می‌توان p_kها را حساب کرد و از آن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A تعیین می‌شود.

مثال ۴. چند جمله‌ای مشخصه ماتریس زیر را به روش لوری‌یر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$S_1 = \operatorname{tr}(A) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow S_2 = \operatorname{tr}(A^2) = 3 + 6 + 1 = 10$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 5 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow S_3 = 1 - 14 + 1 = -12$$

بنابراین :

$$p_1 = -S_1 \Longrightarrow p_1 = 0$$
$$p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(10 + 0) = -5$$
$$p_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1) = -\frac{1}{3}(-12 + 0 + 0) = 4$$

لذا

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda + 4$$

۴.۷ تعیین بردار ویژه نظیر یک مقدار ویژه مشخص

هرگاه λ مقدار ویژه ماتریس A باشد، برای تعیین بردار ویژه نظیر λ بایستی دستگاه زیر را حل کنیم :

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

و یا بایستی دستگاه همگن زیر را حل کنیم :

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

که چون $|\lambda I - A| = 0$ دستگاه همگن فوق بی‌نهایت جواب خواهد داشت که هرکدام مضربی از دیگری است.مطلب را به کمک یک مثال توضیح می‌دهیم :

مثال ۵. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه A و بردارهای ویژه نظیر آنها را به دست آورید.

حل: از $|\lambda I - A| = 0$ داریم :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (\lambda - 2)^2 - 1 = 0$$

و از آن $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 3$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.ابتدا مقدار ویژه نظیر $\lambda_1 = 1$ را به دست می‌آوریم :

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{x} = 0$$

$$(I - A)\mathbf{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

لذا $x_1 = -x_2$.با انتخاب $x_1 = 1$ یکی از بردارهای ویژه A نظیر λ_1 عبارتست از :

$$\mathbf{x} = [1, -1]^t$$

و سایر مقادیر ویژه متناظر با $\lambda_1 = 1$ عبارتند از بردارهای زیر که در آن α هر عدد دلخواه غیر صفر است.

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha[1, -1]^t$$

مثلاً $[2, -2]^t, [\sqrt{5}, -\sqrt{5}]^t$ و ...نیز بردارهای ویژه نظیر $\lambda_1 = 1$ می‌باشند.

به طور مشابه برای تعیین بردار ویژه A نظیر به $\lambda_2 = 3$ بایستی جواب دستگاه $(\lambda_2 I - A)\mathbf{x} = 0$ را به دست آوریم که این دستگاه عبارتست از :

$$(3I - A)\mathbf{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

لذا $x_1 = x_2$. اینجا نیز با انتخاب $x_1 = 1$ یکی از بردارهای ویژهٔ A نظیر $\lambda_2 = 3$ عبارتست از:

$$\mathbf{x} = [1, 1]^t$$

و سایر بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_2 = 3$ عبارتند از بردارهای زیر که در آن‌ها β هر عدد دلخواه مخالف صفر است:

$$\beta\mathbf{x} = \beta[1, 1]^t$$

۵.۷ به دست آوردن وارون یک ماتریس با استفاده از قضیه کیلی-هامیلتون

هرگاه چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

بنا به قضیه کیلی-هامیلتون داریم:

$$A^n + p_1A^{n-1} + p_2A^{n-2} + \cdots + p_{n-1}A + p_nI = 0 \qquad (8)$$

هرگاه $|A| \neq 0$، با ضرب A^{-1} در طرفین رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$A^{n-1} + p_1A^{n-2} + p_2A^{n-3} + \cdots + p_{n-1}I + p_nA^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{p_n}[A^{n-1} + p_1A^{n-2} + p_2A^{n-3} + \cdots + p_{n-1}I] \qquad (9)$$

بنابراین با مشخص بودن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A وارون ماتریس نامنفرد A از رابطه (۹) تعیین می‌شود.

مثال ۶. وارون ماتریس زیر را به دست آورید :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل: در مثالهای قبلی به دست آوردیم :

$$f(\lambda) = \lambda^۲ - ۵\lambda + ۴ = ۰$$

و از آن خواهیم داشت :

$$A^۲ - ۵A + ۴I = ۰$$

بنابراین از رابطه (۹) داریم :

$$\begin{aligned} A^{-۱} &= -\frac{۱}{۴}[A^۲ - ۵I] \\ &= -\frac{۱}{۴}\left\{\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۲ \\ -۱ & ۶ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}\right\} \\ &= -\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۲ & -۲ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تذکر. همانگونه که رابطه (۹) نشان می‌دهد هرگاه در چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A مقدار p_n یعنی مقدار ثابت برابر صفر باشد در این صورت ماتریس A وارون‌پذیر نمی‌باشد.

۶.۷ روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه

روشهای تکراری اغلب برای مسائلی که در آنها نیاز به محاسبه یک یا دو مقدار ویژه می‌باشد، مناسب هستند.البته طرقی برای تعمیم این روشها جهت یافتن تمام مقادیر ویژه یک ماتریس وجود دارد.در این روش فرض بر این است که ماتریس A دارای مولفه‌های حقیقی و از مرتبه n بوده و دارای n بردار ویژه مستقل خطی است.

روش توانی

در این روش به دنبال یافتن بزرگترین مقدار ویژه A «از نظر قدر مطلق» بدون استفاده از بسط دترمینان مشخصه هستیم.فرض کنید $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A و $V_1, V_2, \cdots, V_n$ بردارهای ویژه نظیر آنها هستند.همچنین بردارهای ویژه، یک مجموعه مستقل خطی تشکیل می‌دهند.

همچنین فرض کنید، داریم :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

یعنی بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدر مطلق، منحصر به فرد است.

هرگاه $\mathbf{y} \neq 0$ یک بردار دلخواه باشد، در این صورت بردارهای زیر را محاسبه می‌کنیم :

$$A\mathbf{y}, \quad A^2\mathbf{y} = A(A\mathbf{y}), \quad A^3\mathbf{y} = A(A^2\mathbf{y}), \cdots, A^m\mathbf{y} = A(A^{m-1}\mathbf{y}), \cdots$$

در این صورت با افزایش m اثبات می‌شود که :

$$\frac{(A^m\mathbf{y})_j}{(A^{m-1}\mathbf{y})_j} \simeq \lambda_1 \qquad (10)$$

که در آن $(A^m\mathbf{y})_j$ مولفهٔ jام بردار $A^m\mathbf{y}$ است.برای بهتر بودن تقریب، برای $j = 1, \cdots, n$ مقدار λ_1 را از رابطه (۱۰) محاسبه نموده و میانگین آنها را به عنوان تقریب λ_1 ارائه می‌دهیم.

همچنین بردار ویژه نظیر λ_1 به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\mathbf{V}_1 = A^m\mathbf{y}$$

که می‌توان $V_۱$ را با تقسیم نمودن مولفه‌هایش بر بزرگترین مولفهٔ آن، از نظر قدر مطلق ، نرمال نمود.

نکته: معمولاً قرار می‌دهیم $m = ۱۰$، یعنی ۱۰ تکرار انجام می‌دهیم.

مثال ۷. به روش توانی، بزرگترین مقدار ویژه ماتریس زیر را از نظر قدر مطلق، به دست آورده و بردار ویژه نظیر آن را نیز به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل: قرار می‌دهیم $\mathbf{y} = [۱, ۱, ۱]^t$ و بردارهای زیر را حساب می‌کنیم :

$$A\mathbf{y}, \quad A^۲\mathbf{y}, \cdots, A^{۱۰}\mathbf{y}$$

برای راحتی بردارهای فوق را در جدول زیر خلاصه نموده‌ایم

$\mathbf{y}$	$A\mathbf{y}$	$A^۲\mathbf{y}$	$A^۳\mathbf{y}$	$A^۴\mathbf{y}$	$A^۵\mathbf{y}$	$A^۶\mathbf{y}$	$A^۷\mathbf{y}$	$A^۸\mathbf{y}$	$A^۹\mathbf{y}$	$A^{۱۰}\mathbf{y}$
۱	۵	۲۴	۱۱۱	۵۰۴	۲۲۶۸	۱۰۱۶۱	۴۵۴۲۳	۲۰۲۸۳۳	۹۰۵۲۳۸	۴۰۳۸۹۳۹
۱	۴	۱۵	۶۰	۲۵۲	۱۰۸۹	۴۷۷۹	۲۱۱۴۱	۹۳۹۰۶	۴۱۷۹۸۷	۱۸۶۲۴۶۰
۱	۲	۶	۲۱	۸۱	۳۳۳	۱۴۲۲	۶۲۰۱	۲۷۳۴۲	۱۲۱۲۴۸	۵۳۹۲۳۵

از جدول فوق تقریبهای $\lambda_۱$ عبارتند از :

$$\text{اولین تقریب } \lambda_۱ \simeq \frac{۴۰۳۸۹۳۹}{۹۰۵۲۳۸} = ۴{,}۴۶۲ \qquad (۳D)$$

$$\text{دومین تقریب } \lambda_۱ \simeq \frac{۱۸۶۲۴۶۰}{۴۱۷۹۸۷} = ۴{,}۴۵۶ \qquad (۳D)$$

$$\text{سومین تقریب } \lambda_۱ \simeq \frac{۵۳۹۲۳۵}{۱۲۱۲۴۸} = ۴{,}۴۴۷ \qquad (۳D)$$

بنابراین $\lambda_۱$ را میانگین تقریبهای فوق در نظر می‌گیریم، یعنی

$$\lambda_۱ \simeq \frac{۱}{۳}(۴{,}۴۶۲ + ۴{,}۴۵۶ + ۴{,}۴۴۷) \simeq ۴{,}۴۵۵ \qquad (۳D)$$

لذا

$$\lambda_۱ \simeq ۴/۴۶ \qquad (۲D)$$

$V_۱$ بردار ویژه نظیر $\lambda_۱$ عبارتست از :

$$V_۱ = \begin{bmatrix} ۴۰۳۸۹۳۹ \\ ۱۸۶۲۴۶۰ \\ ۵۳۹۲۳۵ \end{bmatrix}$$

هرگاه $V_۱$ را در $\frac{۱}{۴۰۳۸۹۳۹}$ ضرب کنیم، بردار ویژه نرمال شده نظیر $\lambda_۱$ عبارتست از :

$$V_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰/۴۶ \\ ۰/۱۳ \end{bmatrix}$$

مجموعه مسائل فصل هفتم

۱ - چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر مشخصه ماتریسهای زیر را به روشهای ضرائب نامعین، کریلف و لوری‌یر به دست آورید.

الف. $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ & ۵ \\ -۲ & -۴ & -۴ \\ ۳ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ جواب. $f(\lambda) = \lambda^۳ - ۴\lambda^۲ + ۵\lambda - ۲ = ۰$

$\lambda_۱ = ۲, \lambda_۲ = \lambda_۳ = ۱$

ب. $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ جواب. $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \lambda_۳ = ۲$

پ. $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۳ \\ ۱۰ & -۴ & ۵ \\ ۵ & -۴ & ۶ \end{bmatrix}$ جواب. $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ۱, \lambda_۳ = ۲$

ت. $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ جواب. $\lambda_۱ = ۱, \lambda_۲ = ۲, \lambda_۳ = ۳$

ث. $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ جواب. $f(\lambda) = \lambda^۴ - ۴\lambda^۳ - ۴۰\lambda^۲ - ۵۶\lambda - ۲۰ = ۰$

۲- بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه A را در قسمتهای الف تا ت مساله ۱ به دست آورید.

۳- با استفاده از قضیه کیلی-هامیلتون وارون ماتریسهای مساله ۱۸ فصل ششم را به دست آورید.

۴- تقریبی از بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A را به روش توانی در هر کدام از حالتهای زیر به دست آورید.

الف. تقریبی از $\lambda_۱ = ۲$ برای ماتریس A قسمت الف مساله ۱

ب. تقریبی از $\lambda_۲ = ۲$ برای ماتریس A قسمت پ مساله ۱

پ. تقریبی از $\lambda_۳ = ۳$ برای ماتریس A قسمت ت مساله ۱

۵- تقریبی از بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه مساله قبل را به روش توانی به دست آورید. بردار $\mathbf{y}$ را به دلخواه، خودتان انتخاب کنید.

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & -۱۰ & ۰ \\ ۵ & -۱۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $\mathbf{y} = [۱, ۱, ۱]^t$، بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A را از نظر قدر

مطلق و بردار ویژه متناظر با آن را به دست آورید.(قرار دهید $m = 5$)

جواب. $\lambda_1 \simeq -9{,}11408$ و $V_1 = A^5\mathbf{y}$ که نرمال شده V_1 عبارتست از

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0{,}75660 \\ 1 \\ -0{,}06704 \end{bmatrix}$$

فصل هشتم

روش حداقل مربعات

۱.۸ مقدمه

درونیابی به وسیله چند جمله‌ای درونیاب در فصل سوم مورد بررسی قرار گرفت.روند مورد بحث در فصل سوم را در نظر بگیرید.جدول زیر مربوط به تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ می‌باشد :

x_i	۰	۱	۸	۲۷	۶۴
f_i	۰	۱	۲	۳	۴

فرض کنید بخواهیم با استفاده از درونیابی لاگرانژ تخمینی از $\sqrt[3]{۲۰}$ به دست آوریم.برای این منظور و با محاسبه چند جمله‌ایهای لاگرانژ خواهیم داشت :

$$P(x) = ۱ \times \frac{x(x-۸)(x-۲۷)(x-۶۴)}{۱(-۷)(-۲۶)(-۶۳)} + ۲ \times \frac{x(x-۱)(x-۲۷)(x-۶۴)}{۸(۷)(-۱۹)(-۵۶)}$$
$$+ ۳ \times \frac{x(x-۱)(x-۸)(x-۶۴)}{۲۷(۲۶)(۱۹)(-۳۷)} + ۴ \times \frac{x(x-۱)(x-۸)(x-۲۷)}{۶۴(۶۳)(۵۶)(۳۷)}$$

برای تخمین $\sqrt[3]{۲۰}$ قرار می‌دهیم $x = ۲۰$ و از آن خواهیم داشت :

$$\sqrt[3]{۲۰} \simeq P(۲۰) = -۱/۳۱۳۹ \qquad (۴D)$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود تقریب $\sqrt[3]{۲۰}$ به کمک $P(x)$ منفی است، که به وضوح نتیجه ی نادرست است.با رسم منحنی $y = \sqrt[3]{x}$ مشاهده می‌شود که شکل منحنی در فاصله $[۸, ۲۷]$ به یک خط مستقیم نزدیک است.لذا هرگاه در فاصله $[۸, ۲۷]$ چند جمله‌ای درونیاب درجهٔ اول را به دست آوریم خواهیم داشت :

$$P_۱(x) = ۲ \times \frac{x - ۲۷}{۸ - ۲۷} + ۳ \times \frac{x - ۸}{۲۷ - ۸}$$

و از آن تقریب $\sqrt[3]{۲۰}$ عبارتست از :

$$\sqrt[3]{۲۰} \simeq P_۱(۲۰) = \frac{۱۴}{۱۹} + \frac{۳۶}{۱۹} = \frac{۵۰}{۱۹} = ۲/۶۳۱۶ \qquad (۴D)$$

که از مقدار واقعی یعنی $\sqrt[3]{۲۰} = ۲/۷۱۴۴ \quad (۴D)$ خیلی دور نیست.

مطلب فوق نشان می‌دهد که درونیابی به کمک چند جمله‌ای از درجه بالا همواره نمی‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

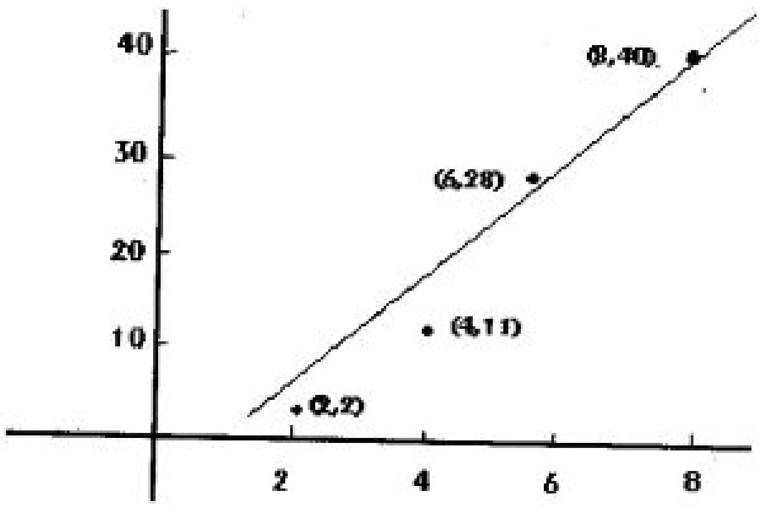
۲.۸ خط حداقل مربعات

مسأله تخمین مقادیر یک تابع در نقاط غیر جدولی را برای داده‌های جدول زیر در نظر بگیرید، که این داده‌ها از طریق آزمایش به دست آمده‌اند.

جدول (۱)

x_i	y_i
۲	۲
۴	۱۱
۶	۲۸
۸	۴۰

هرگاه از روش لاگرانژ برای ساختن چند جمله‌ای درونیاب استفاده کنیم، به یک منحنی (حداکثر) از درجهٔ ۳ نیاز داریم.اما با رسم داده‌ها به نظر می‌رسد، فرض شود که رابطه واقعی بین داده‌ها یک رابطه خطی است.اما به خاطر خطای جمع آوری داده‌ها (که از طریق آزمایش به دست آمده‌اند) هیچ خطی داده‌ها را دقیقاً برازش نمی‌کند.شکل زیر رسم مقادیر (x_i, y_i) از جدول (۱) را نشان می‌دهد :



لذا در چنین حالتی، جستجوی تابع تقریب‌سازی که بر داده‌های معلوم دقیقاً منطبق است، نامعقول بوده و راه بهتر یافتن بهترین (به یک مفهوم) خطی است که بتواند به عنوان تابع تقریب ساز به کار رود، ولو اینکه بر داده‌ها در هر نقطه دقیقاً منطبق نباشد.

لذا هرگاه قرار دهیم

$$P(x) = a_1 x + a_0$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$P(x_i) = a_1 x_i + a_0$$
$$= \bar{y}_i$$

در تقریب حداقل مربعات، مساله عبارتست از تعیین ضرایب a_0 و a_1 به طوری که مقدار زیر را مینیمم کند :

$$S = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y}_i)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (y_i - (a_1 x_i + a_0))^2 \qquad (1)$$

که در آن m تعداد کل داده‌ها و y_iها مقادیر داده شده می‌باشند.

قضیه‌ای از حساب توابع چند متغیره

شرط لازم برای دارا بودن اکسترمم در یک نقطه : هرگاه $f(x,y)$ در نقطه (a,b) دارای یک مینیمم (یا ماکزیمم) باشد، در این صورت لازم است داشته باشیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \qquad (2)$$

شرط (۲) برای توابع n متغیره که $n > 2$ نیز برقرار است.

با توجه به قضیه فوق، هرگاه S بخواهد در a_0 و a_1 کمترین مقدار را داشته باشد، بایستی مشتقهای اول S نسبت به a_0 و a_1 صفر باشد، یعنی بایستی

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \qquad (3)$$

بنابراین از اینکه $S = \sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)^2$ و از شرایط (۳) خواهیم داشت :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{m} 2(y_i - a_1x_i - a_0)(-1) = 0 \tag{۴}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{m} 2(y_i - a_1x_i - a_0)(-x_i) = 0 \tag{۵}$$

از رابطه (۴) خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i - a_1\sum_{i=1}^{m} x_i - a_0\sum_{i=1}^{m} 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i - a_1\sum_{i=1}^{m} x_i - ma_0 = 0 \tag{۶}$$

و از رابطه (۵) نیز خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - a_1x_i - a_0)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_iy_i - a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - a_0\sum_{i=1}^{m} x_i = 0 \tag{۷}$$

با مرتب نمودن روابط (۶) و (۷) به روابط زیر خواهیم رسید :

$$\begin{cases} ma_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 = \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 = \sum x_iy_i \end{cases} \tag{۸}$$

تعریف. معادلات (۸) **معادلات نرمال** نامیده می‌شوند.

از حل دستگاه (۸) با استفاده از روش کرامر، برای a_0 و a_1 مقادیر زیر را خواهیم داشت :

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_iy_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

(۹)

$$a_1 = \frac{m\sum x_iy_i - \sum x_i \sum y_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

نکته: می‌توان نشان داد که هرگاه حداقل دو تا از x_iها متمایز باشند، مقادیر a_0 و a_1 موجود و از (۹) قابل محاسبه می‌باشند.

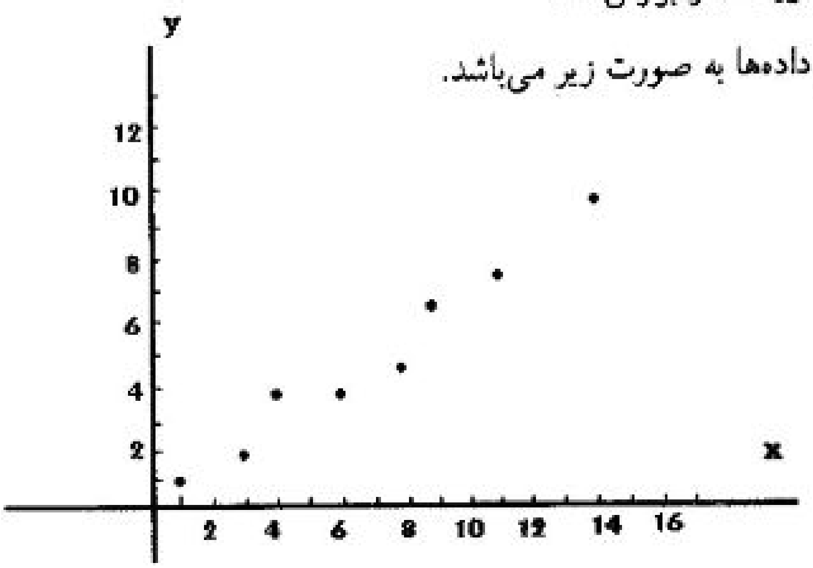
مثال ۱. فرض کنید داده‌های زیر نتیجه یک سری آزمایش باشند :

جدول (۲)

x	y
۱	۱
۳	۲
۴	۴
۶	۴
۸	۵
۹	۷
۱۱	۸
۱۴	۹

داده‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و خط حداقل مربعاتی را به دست آورید که داده‌های جدول (۲) را برازش کند.

حل: رسم داده‌ها به صورت زیر می‌باشد.



برای محاسبه a_0 و a_1 از معادلات (۹) جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

جدول (۳)

x	y	$x^۲$	xy
۱	۱	۱	۱
۳	۲	۹	۶
۴	۴	۱۶	۱۶
۶	۴	۳۶	۲۴
۸	۵	۶۴	۴۰
۹	۷	۸۱	۶۳
۱۱	۸	۱۲۱	۸۸
۱۴	۹	۱۹۶	۱۲۶
مجموع ۵۶	۴۰	۵۲۴	۳۶۴

بنابراین $a_۰$ و $a_۱$ عبارتند از :

$$a_۰ = \frac{۴۰ \times ۵۲۴ - ۵۶ \times ۳۶۴}{۸ \times ۵۲۴ - (۵۶)^۲} = \frac{۶}{۱۱}$$
$$a_۱ = \frac{۸ \times ۳۶۴ - ۵۶ \times ۴۰}{۸ \times ۵۲۴ - (۵۶)^۲} = \frac{۷}{۱۱}$$

لذا معادله خط کمترین مربعات عبارتست از :

$$y = \frac{۷}{۱۱}x + \frac{۶}{۱۱}$$

در این صورت خطای زیر بهترین خطایی است که می‌توان با استفاده از یک خط برای برازش داده‌های جدول (۲) به روش حداقل مربعات به دست آورد :

$$\left\{\sum_{i=۱}^{۸}(y_i - \bar{y}_i)^۲\right\}^{۱/۲} = ۱{,}۵۹۵$$

که در آن داریم :

$$y_1 - \bar{y}_1 = 1 - (\frac{7}{11} + \frac{6}{11}) = -\frac{2}{11}$$
$$y_2 - \bar{y}_2 = 2 - (\frac{7}{11} \times 3 + \frac{6}{11}) = -\frac{5}{11}$$
$$\vdots$$
$$y_8 - \bar{y}_8 = 9 - (\frac{7}{11} \times 14 + \frac{6}{11}) = -\frac{5}{11}$$

۳.۸ چند جمله‌ای حداقل مربعات

مساله تقریب‌سازی مجموعه‌ای از داده‌ها به صورت

$$\{(x_i, y_i) : \quad i = 1, \cdots, m\}$$

با یک چند جمله‌ای از درجهٔ n که $n < m$ به صورت

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

با استفاده از روش حداقل مربعات، مشابه حالت خط کمترین مربعات می‌باشد.در حالتی مشابه حالت خطی می‌نویسیم :

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

و برای $x = x_i$ داریم :

$$\bar{y}_i = P(x_i) = a_n x_i^n + \cdots + a_1 x_i + a_0$$

در اینجا، هدف حداقل ساختن مقدار زیر است :

$$S = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y}_i)^2$$

و یا

$$S = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_n x_i^n - \cdots - a_p x_i^p - \cdots - a_1 x_i - a_0)^2 \qquad (10)$$

بنابراین مساله عبارت است از یافتن ثابتهای $a_0, a_1, \cdots, a_n$ به طوری که مقدار S حداقل گردد مانند حالت خطی، برای آن که S حداقل شود، لازم است داشته باشیم :

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \qquad j = 0, 1, \cdots, n \qquad (11)$$

در اینجا نیز مشابه حالت قبل از (۱۰) و شرایط (۱۱) معادلات نرمال را به صورت زیر به دست خواهیم آورد :

$$\begin{aligned}
&m a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \cdots + \left(\sum x_i^k\right) a_k + \cdots + \left(\sum x_i^n\right) a_n = \sum y_i \\
&\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \cdots + \left(\sum x_i^{k+1}\right) a_k + \cdots + \left(\sum x_i^{n+1}\right) a_n = \sum x_i y_i \\
&\vdots \\
&\left(\sum x_i^p\right) a_0 + \left(\sum x_i^{p+1}\right) a_1 + \cdots + \left(\sum x_i^{k+p}\right) a_k + \cdots + \left(\sum x_i^{n+p}\right) a_n = \sum x_i^p y_i \\
&\vdots \\
&\left(\sum x_i^n\right) a_0 + \left(\sum x_i^{n+1}\right) a_1 + \cdots + \left(\sum x_i^{k+n}\right) a_k + \cdots + \left(\sum x_i^{2n}\right) a_n = \sum x_i^n y_i
\end{aligned}$$

مثال ۲. داده‌های جدول زیر را با چند جمله‌ای حداقل مربعات درجهٔ دو، برازش کنید .داده‌ها و چند جمله‌ای حداقل مربعات درجه دو را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

جدول (۴)

i	۱	۲	۳	۴	۵
x_i	۰	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۷۵	۱٫۰۰
y_i	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۸۴۰	۱٫۶۴۸۷	۲٫۱۱۷۰	۲٫۷۱۸۳

حل: در این مساله $n=۲$، $m=۵$ و سه معادله نرمال عبارتند از:

$$۵a_۰ + ۲/۵a_۱ + ۱/۸۷۵a_۲ = ۸/۷۶۸۰$$

$$۲/۵a_۰ + ۱/۸۷۵a_۱ + ۱/۵۶۲۵a_۲ = ۵/۴۵۱۴$$

$$۱/۸۷۵a_۰ + ۱/۵۶۲۵a_۱ + ۱/۳۸۲۸a_۲ = ۴/۴۰۱۵$$

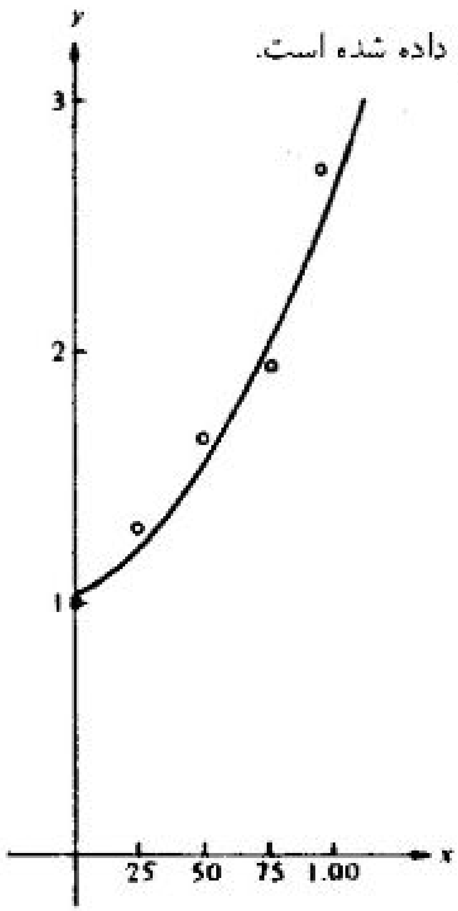
جواب این دستگاه عبارت است از

$$a_۰ = ۱/۰۰۵۲,\quad a_۱ = ۰/۸۶۴۱,\quad a_۲ = ۰/۸۴۳۷$$

بنابراین چند جمله‌ای کمترین مربعات درجهٔ دو برازندهٔ داده‌های فوق عبارت است از

$$P_۲(x) = ۱/۰۰۵۲ + ۰/۸۶۴۱x + ۰/۸۴۳۷x^۲$$

که نمودار آن در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل (۳)

برای محاسبه خطای روش حداقل مربعات بایستی $y_i-\bar{y}_i$ و یا $y_i-P(x_i)$ را برای $i=۱,۲,۳,۴,۵$ محاسبه کنیم و از آن تقریبهای جدول (۵) را خواهیم داشت.

جدول (۵)

i	۱	۲	۳	۴	۵
x_i	۰	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۵	۱/۰۰
y_i	۱/۰۰۰۰	۱/۲۸۴۰	۱/۶۴۸۷	۲/۱۱۷۰	۲/۷۱۸۳
$P(x_i)$	۱/۰۰۵۲	۱/۲۷۴۰	۱/۶۴۸۲	۲/۱۲۷۹	۲/۷۱۳۰
$y_i-P(x_i)$	−۰/۰۰۵۲	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۵	−۰/۰۱۰۹	۰/۰۰۵۳

لذا خطای

$$\left\{\sum_{i=۱}^{۵}(y_i-P(x_i))^{۲}\right\}^{۱/۲}=۰/۰۱۶۶$$

بهترین خطایی است که می‌توان با استفاده از یک چند جمله‌ای درجهٔ دو به دست آورد.

۴.۸ انواع دیگری از تقریب‌های حداقل مربعات

در خیلی از مسائل، تقریب به وسیلهٔ چند جمله‌ای مناسب نیست، زیرا وقتی (x_i,y_i) ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، ممکن است مجموعه نقاط رسم شده شبیه یک منحنی نمایی، هذلولی و یا یک منحنی مثلثاتی باشد.

در حالت نمایی رابطهٔ بین x و y می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود :

$$y=a_۰e^{a_۱x} \qquad (۱۲)$$

در حالت هذلولی رابطهٔ x و y می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود :

$$y=\frac{۱}{a_۰+a_۱x} \qquad (۱۳)$$

در حالت مثلثاتی رابطه x و y می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود :

$$y = a_0 + a_1 \cos wx \tag{۱۴}$$

که در آن w مقداری معلوم است.

در زیر برای هر کدام از حالتهای فوق، معادلات نرمال را به دست می‌آوریم :

۱.۴.۸ حالت نمایی

هر گاه x_iها و $\ln y_i$ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم و رابطه‌ای خطی بین $(x_i, \ln y_i)$ها ظاهر شود، در چنین حالتی معقول است که تقریبی به صورت زیر در نظر بگیریم :

$$y = a_0 e^{a_1 x}$$

و از آن خواهیم داشت :

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x$$

هر گاه قرار دهیم $A = \ln a_0$ و $z = \ln y$ در این صورت داریم :

$$z = A + a_1 x \tag{۱۵}$$

رابطهٔ (۱۵) رابطه‌ای خطی بین z و x می‌باشد.لذا روش حداقل مربعات به منظور حداقل کردن مقدار زیر می‌باشد :

$$S = \sum (\ln y_i - A - a_1 x_i)^2$$

با روش به کار رفته در قسمت‌های قبل معادلات نرمال در اینجا عبارتند از :

$$\begin{cases} mA + a_1 \sum x_i = \sum \ln y_i \\ A \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i \end{cases} \tag{۱۶}$$

که در آن پس از تعیین A و a_1 قرار می‌دهیم $A = \ln a_\circ$ و از آن

$$a_\circ = e^A$$

مثال ۳. داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول (۶)

i	x_i	y_i
۱	۱٫۰۰	۵٫۱۰
۲	۱٫۲۵	۵٫۷۹
۳	۱٫۵۰	۶٫۵۳
۴	۱٫۷۵	۷٫۴۵
۵	۲٫۰۰	۸٫۴۶

اگر x_iها با $\ln y_i$ها رسم شوند، معلوم می‌شود که داده‌ها رابطه‌ای خطی دارند. لذا تقریب حداقل مربعات برای برازش داده‌های فوق به صورت نمایی است. این تابع نمایی را تعیین کنید.

حل: قرار می‌دهیم $y = a_\circ e^{a_1 x}$ و یا $\ln y = \ln a_\circ + a_1 x$. بنابراین با استفاده از معادلات نرمال (۱۶) برای به دست آوردن $\ln a_\circ$ و a_1 از روابط (۹) جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول (۷)

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$
۱	۱٫۰۰	۵٫۱۰	۱٫۶۲۹	۱٫۰۰۰۰	۱٫۶۲۹
۲	۱٫۲۵	۵٫۷۹	۱٫۷۵۶	۱٫۵۶۲۵	۲٫۱۹۵
۳	۱٫۵۰	۶٫۵۳	۱٫۸۷۶	۲٫۲۵۰۰	۲٫۸۱۴
۴	۱٫۷۵	۷٫۴۵	۲٫۰۰۸	۳٫۰۶۲۵	۳٫۵۱۴
۵	۲٫۰۰	۸٫۴۶	۲٫۱۳۵	۴٫۰۰۰۰	۴٫۲۷۰
مجموع	۷٫۵۰		۹٫۴۰۴	۱۱٫۸۷۵	۱۴٫۴۲۲

لذا با استفاده از مقادیر جدول (۷) و روابط (۹) خواهیم داشت :

$$a_۱ = \frac{(۵)(۱۴/۴۲۲) - (۷/۵)(۹/۴۰۴)}{(۵)(۱۱/۸۷۵) - (۷/۵)^۲} = ۰/۵۰۵۶$$

$$\ln a_۰ = \frac{(۱۱/۸۷۵)(۹/۴۰۴) - (۱۴/۴۲۲)(۷/۵)}{(۵)(۱۱/۸۷۵) - (۷/۵)^۲} = ۱/۱۲۲$$

و از آن

$$a_۰ = ۳/۰۷۱$$

لذا تقریب مورد نظر عبارتست از :

$$y = ۳/۰۷۱ e^{۰/۵۰۵۶x}$$

تقریب فوق در نقاط x_i از جدول (۶) مقادیر زیر را دارا می‌باشد :

جدول (۸)

i	x_i	y_i	$۳/۰۷۱e^{۰/۵۰۵۶x_i}$
۱	۱/۰۰	۵/۱۰	۵/۰۹
۲	۱/۲۵	۵/۷۹	۵/۷۸
۳	۱/۵۰	۶/۵۳	۶/۵۶
۴	۱/۷۵	۷/۴۵	۷/۴۴
۵	۲/۰۰	۸/۴۶	۸/۴۴

۲.۴.۸ حالت هذلولی

هر گاه با رسم نقاط (x_i, y_i) یک هذلولی را برای برازش داده‌ها مناسب تشخیص دهیم، قرار می‌دهیم

$$y = \frac{۱}{a_۰ + a_۱ x}$$

در این حالت قرار می‌دهیم $z = \frac{1}{y}$ و از آن خواهیم داشت :

$$z = a_0 + a_1 x$$

که رابطه‌ای خطی بین x و z می‌باشد.بنابراین در این حالت مساله این است که مقدار زیر را حداقل کنیم :

$$S = \sum (z_i - \bar{z}_i)^2 \qquad (۱۷)$$

که در آن داریم : $\bar{z}_i = a_0 + a_1 x_i$.چون $z_i = \frac{1}{y_i}$ بنابراین حداقل کردن (۱۷) عبارتست از حداقل نمودن مقدار زیر

$$S = \sum \left(\frac{1}{y_i} - a_0 - a_1 x_i\right)^2$$

در این حالت معادلات نرمال عبارتند از :

$$\begin{cases} m a_0 + a_1 \sum x_i = \sum \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum \frac{x_i}{y_i} \end{cases} \qquad (۱۸)$$

از حل (۱۸) مقادیر a_0 و a_1 تعیین می‌شوند.

۳.۴.۸ حالت مثلثاتی

هرگاه y_iها نوسان داشته باشند و به صورت متناوب ظاهر شوند، یعنی y_iها تقریباً تکرار شوند، منحنی تقریب ساز را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$y = a_0 + a_1 \cos wx$$

که در آن w مقداری معلوم است.در این حالت قرار می‌دهیم :

$$t = \cos wx$$

لذا خواهیم داشت :

$$y = a_{\circ} + a_{1} t$$

که رابطه‌ای خطی بین y و t می‌باشد.بنابراین هدف عبارتست از حداقل نمودن مقدار زیر :

$$S = \sum (y_i - a_{\circ} - a_{1} \cos wx_i)^2$$

و از آن معادلات نرمال عبارتند از :

$$\begin{cases} m a_{\circ} + a_{1} \sum \cos(wx_i) = \sum y_i \\ a_{\circ} \sum \cos(wx_i) + a_{1} \sum \cos^2(wx_i) = \sum y_i \cos(wx_i) \end{cases} \qquad (19)$$

از حل دستگاه (۱۹) مقادیر $a_{\circ}$ و a_{1} قابل تعیین هستند.

مجموعه مسائل فصل هشتم

۱- برای داده‌های زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
y	۰/۹	۱/۹	۲/۸	۳/۳	۴/۲

جواب. $y = 4x + 1/02$

۲- برای داده‌های زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	۲-	۱-	۰	۱	۲
y	۰	۱	۲	۲	۳

جواب. $y = 0/5x + 1/6$

۳- داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید :

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۳	۴	۳	۴	۲

الف.داده‌های جدول را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب.خط حداقل مربعات را برای برازش داده‌های جدول به دست آورید.

جواب.ب) $y = ۰/۲x + ۲/۱۳$

۴- برای داده‌های زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	۳۶	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۷	۵۰
y	۲/۵	۲/۷	۲/۸	۲/۹	۳/۰	۳/۲	۳/۳	۳/۵

جواب. $y = ۰/۰۷۷x - ۰/۳۸$

۵- خط حداقل مربعات را برای برازش داده‌های جدول زیر به دست آورید.

x	۲۵	۲۹	۳۳	۳۶	۴۲	۵۴
y	۴۲	۴۵	۵۰	۴۸	۷۳	۹۰

جواب. $y = ۱/۷۸x - ۶/۹۹$

۶- خط حداقل مربعات مربوط به داده‌های جدول (۱) را به دست آورید.

جواب. $y = ۶/۵۵x - ۱۲/۵$

۷- برای داده‌های جدول زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴
y	۳/۸	۳/۷	۴/۰	۳/۹	۴/۳	۴/۲	۴/۲	۴/۴	۴/۵	۴/۵

جواب. $y = ۰/۰۴۵x + ۳/۴۹$

۸- برای داده‌های جدول زیر خط حداقل مربعات را تعیین کنید.

x	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴
y	۴/۶	۴/۸	۴/۶	۴/۹	۵/۰	۵/۴	۵/۱	۵/۵	۵/۶	۶/۰

جواب. $y = ۰/۰۷x + ۴/۰۷$

۹- داده‌های جدول زیر را با چند جمله‌ای حداقل مربعات درجهٔ دو، برازش کنید.

x	۰	$\pi/۶$	$\pi/۴$	$\pi/۳$	$\pi/۲$
y	۰	۱/۲	$\sqrt{۲}/۲$	$\sqrt{۳}/۲$	۱

جواب. $P(x) = -۰/۳۳۳۴x^۲ + ۱/۱۶۶۷x - ۰/۰۰۴۶$

۱۰- داده‌های جدول مسائه ۷ را با چند جمله‌ای حداقل مربعات از درجهٔ دو، برازش کنید.

جواب. $P(x) = -۰/۰۰۲۳x^۲ + ۰/۱۱x + ۳/۷۳$

۱۱- داده‌های جدول مسأله ۳ را با چند جمله‌ای حداقل مربعات درجهٔ دو، برازش کنید.

جواب. $P(x) = -۰/۳۶x^۲ + ۲/۷۰x - ۱/۲۰$

۱۲- تقریبی به صورت $P(x) = Ae^{Mx}$ برای برازش داده‌های جدول زیر با استفاده از روش حداقل مربعات به دست آورید.

x	۱	۲	۳	۴
y	۷	۱۱	۱۷	۲۷

جواب. $P(x) = ۴/۴۸e^{۰/۴۵x}$

۱۳- داده‌های جدول زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و تقریبی به صورت $P(x) = Ae^{Mx}$ برای برازش داده‌ها با استفاده از روش حداقل مربعات به دست آورید.

x	۱	۲	۳	۴
y	۶۰	۳۰	۲۰	۱۵

جواب. $P(x) = ۸۴/۸e^{-۰/۴۵۶x}$

۱۴- الف. معادلات نرمال را برای برازش m دادهٔ معلوم با یک منحنی به‌صورت $y = a(b^x)$ به‌دست آورده و از آن a و b را تعیین کنید.

راهنمایی: برای $\ln y = \ln a + x \ln b$ قرار دهید:

$$z = \ln y, \qquad A = \ln a, \qquad B = \ln b$$

لذا $z = A + Bx$ که رابطه‌ای خطی بین x و z است و بایستی A و B را طوری به‌دست آورید که مجموع زیر حداقل شود: $S = \sum(\ln y_i - A - Bx_i)^۲$.

ب. با استفاده از قسمت الف داده‌های زیر را با یک منحنی به‌صورت $y = a(b^x)$ برازش کنید.

x	y	x	y
۰	۳	۲٫۵	۱۷
۰٫۵	۴	۳٫۰	۲۴
۱٫۰	۶	۳٫۵	۳۳
۱٫۵	۹	۴٫۰	۴۸
۲٫۰	۱۲		

جواب. الف. معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} mA + (\sum x_i)B = \sum \ln y_i \\ (\sum x_i)A + (\sum x_i^۲)B = \sum x_i \ln y_i \end{cases}$$

ب. جواب بایستی به $y = ۳(۲^x)$ نزدیک باشد.

۱۵- داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

x	y	x	y
-۸	۳۰	-۲	۶
-۶	۱۰	۰	۵
-۴	۹	۲	۴
		۴	۴

الف. داده‌های فوق را با یک منحنی به‌صورت $y = \frac{۱}{a_۰ + a_۱ x}$ برازش کنید.

ب. داده‌های فوق را با یک منحنی به صورت $y = a(b^x)$ برازش کنید.

۱۶ـ الف. معادلات نرمال را برای برازش m دادهٔ معلوم با یک منحنی به معادلهٔ $y = ax^b$ به دست آورده و از آ

a و b را تعیین کنید.

راهنمایی: برای $\ln y = \ln a + b \ln x$ قرار دهید:

$$z = \ln y \quad , \quad A = \ln a \quad , \quad t = \ln x$$

لذا $z = A + bt$ که رابطه‌ای خطی بین z و t است و بایستی A و b را طوری به دست آورید که مجموع ز

حداقل شود:

$$S = \sum (\ln y_i - A - b \ln x_i)^2$$

ب. با استفاده از روابط به دست آمده برای a و b در قسمت الف، داده‌های زیر را به کمک یک منحنی به صور

$y = ax^b$ برازش کنید.

x	y
۱	۵
۱/۵	۶
۲	۳۵
۳	۱۱۰
۴	۲۰۰

جواب. الف. معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} mA + (\sum \ln x_i)b = \sum \ln y_i \\ (\sum \ln x_i)A + (\sum (\ln x_i)^2)b = \sum (\ln x_i)(\ln y_i) \end{cases}$$

ب. جواب بایستی به $y = 3x^2$ نزدیک باشد.

۱۷- الف. معادلات نرمال را برای برازش m دادهٔ معلوم توسط یک منحنی به‌صورت

$$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

به‌دست آورده و از آن a_0، a_1 و b_1 را تعیین کنید.

راهنمایی: بایستی a_0، a_1 و b_1 را تعیین کنید که مجموع زیر حداقل شود:

$$S = \sum (y_i - a_0 - a_1 \cos x_i - b_1 \sin x_i)^2$$

ب. با استفاده از مقادیر به دست آمده برای a_0، a_1 و b_1 در قسمت الف، داده‌های زیر را با یک منحنی به‌صورت $y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ برازش کنید:

x	y	x	y
۰	۳٫۰	۳٫۶	۲٫۰
۰٫۴	۲٫۱	۴٫۰	۲٫۹
۰٫۸	۱٫۳	۴٫۴	۳٫۵
۱٫۲	۰٫۵	۴٫۸	۴٫۰
۱٫۶	۰	۵٫۲	۴٫۲
۲٫۰	−۰٫۲	۵٫۶	۴٫۰
۲٫۴۰	۰	۶٫۰	۳٫۵
۲٫۸	۰٫۳		
۳٫۲	۱٫۱		

جواب. ب. جواب بایستی به $y = 2 + \cos x - 2 \sin x$ نزدیک باشد.

ب. داده‌های فوق را با یک منحنی به صورت $y = a(b^x)$ برازش کنید.

۱۶ــ الف. معادلات نرمال را برای برازش m دادهٔ معلوم با یک منحنی به معادلهٔ $y = ax^b$ به دست آورده و از آن a و b را تعیین کنید.

راهنمایی: برای $\ln y = \ln a + b \ln x$ قرار دهید:

$$z = \ln y \quad , \quad A = \ln a \quad , \quad t = \ln x$$

لذا $z = A + bt$ که رابطه‌ای خطی بین z و t است و بایستی A و b را طوری به دست آورید که مجموع زیر حداقل شود:

$$S = \sum (\ln y_i - A - b \ln x_i)^۲$$

ب. با استفاده از روابط به دست آمده برای a و b در قسمت الف، داده‌های زیر را به کمک یک منحنی به صورت $y = ax^b$ برازش کنید.

x	y
۱	۵
۱/۵	۶
۲	۳۵
۳	۱۱۰
۴	۲۰۰

جواب. الف. معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} mA + (\sum \ln x_i) b = \sum \ln y_i \\ (\sum \ln x_i) A + (\sum (\ln x_i)^۲) b = \sum (\ln x_i)(\ln y_i) \end{cases}$$

ب. جواب بایستی به $y = ۳x^۲$ نزدیک باشد.

۱۷- الف. معادلات نرمال را برای برازش m دادهٔ معلوم توسط یک منحنی به‌صورت

$$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

به‌دست آورده و از آن a_0، a_1 و b_1 را تعیین کنید.

راهنمایی: بایستی a_0، a_1 و b_1 را تعیین کنید که مجموع زیر حداقل شود:

$$S = \sum (y_i - a_0 - a_1 \cos x_i - b_1 \sin x_i)^2$$

ب. با استفاده از مقادیر به دست آمده برای a_0، a_1 و b_1 در قسمت الف، داده‌های زیر را با یک منحنی به‌صورت $y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ برازش کنید:

x	y	x	y
۰	۳٫۰	۳٫۶	۲٫۰
۰٫۴	۲٫۱	۴٫۰	۲٫۹
۰٫۸	۱٫۳	۴٫۴	۳٫۵
۱٫۲	۰٫۵	۴٫۸	۴٫۰
۱٫۶	۰	۵٫۲	۴٫۲
۲٫۰	−۰٫۲	۵٫۶	۴٫۰
۲٫۴۰	۰	۶٫۰	۳٫۵
۲٫۸	۰٫۳		
۳٫۲	۱٫۱		

جواب. ب. جواب بایستی به $y = 2 + \cos x - 2 \sin x$ نزدیک باشد.

پیوست برنامه‌های کامپیوتری

در این قسمت برنامه‌های کامپیوتری الگوریتم‌های ارائه شده در کتاب با استفاده از نرم‌افزار C++ نوشته شده است. این برنامه‌ها به ترتیب عبارتند از:

۱- روش دوبخشی Bisection method

۲- روش تکرار ساده Fixed point iteration method

۳- روش وتری Secant method

۴- روش نابجایی Regula falsi method

۵- روش نیوتن-رفسون Newton-Raphson method

۶- انتگرال‌گیری به روش ذوزنقه‌ای Trapezoid integration

۷- روش انتگرالگیری سیمپسون Simpon's method

۸- روش انتگرالگیری گاوس دونقطه‌ای Gaussian Rule (2-point method)

۹- روش انتگرالگیری گاوس سه‌نقطه‌ای Gaussian Rule (3-point method)

۱۰- روش حذف گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی Gauss method

۱۱- روش تکراری گاوس - سایدل برای حل دستگاه معادلات خطی Gauss - Seidel

۱۲- روش اویلر برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول Euler method

۱۳- روش مرتبه دوم رونگه -کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱۴- روش مرتبه چهارم رونگه -کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱۵- روش مرتبه چهارم رونگه -کوتا برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر:

$$\begin{cases} y' = f_1(x,y,p) \\ p' = f_2(x,y,p) \end{cases} \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad p(x_0) = p_0$$

۱- روش دوبخشی Bisection method

```
//Bisection method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>

double F(double x){return 3*x-exp(-x);}

void main(){
	float a,b,eps,x;
	int n=1;
	cout<<"Enter a,b,eps";
	cin>>a>>b>>eps;
	x=(a+b)/2;
	while(fabs(F(x))>=eps){
		if(F(x)*F(a)>0)
			a=x;
		else
			b=x;
		x=(a+b)/2;
		n++;
	}
	cout<<"ROOT = "<<x;
	cout<<"ITERATION = "<<n;
	getch();
}
```

۲- روش تکرار ساده **Fixed point iteration method**

```
//Fixed point iteration method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>

double F(double x){return 100*sin(x)-x;}
double G(double x){return asin(0.01*x);}

void main(){
        clrscr();
        double eps,x0,x1,x;
        int n=1;
        cout<<"Enter x0,eps";
        cin>>x0>>eps;
        x=G(x0);
        while(fabs(x-x0)>=eps){
             x0=x;
             x=G(x0);
             n++;
        }
        cout<<"ROOT = "<<x;
        cout<<"\nITERATION = "<<n;
        getch();
}
```

۳-روش وتری **Secant method**

```
//Secant method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
double F(double x){return x*x*x*x-sinh(x);}
void main(){
      clrscr();
      double eps,x0,x1,x;
      int n=1;
      cout<<"Enter x0,x1,eps\n";
      cin>>x0>>x1>>eps;
      x=x1-(F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0));
      while(fabs(x1-x0)>=eps){
          cout<<x0<<"\t"<<x1<<"\t"<<x<<"\n";
          x0=x1;
          x1=x;
          x=x1-(F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0));
          n++;
      }
      cout<<"ROOT = "<<x;
      cout<<"\nITERATION = "<<n;
      getch();
}
```

۴- روش نابجایی **Regula falsi method**

```
//Regula falsi method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
double F(double x){return x*x*x*x-sinh(x);}

void main(){
        clrscr();
      double eps,a,b,x;
      int n=1;
      cout<<"Enter a,b,eps";
      cin>>a>>b>>eps;
      x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a));
      while(fabs(F(x))>=eps){
          cout<<x<<"\n";
          if(F(x)*F(a)>0)
         a=x;
          else
         b=x;
          x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a));
          n++;
      }
      cout<<"ROOT = "<<x;
      cout<<"\nITERATION = "<<n;

      getch();
}
```

۵-روش نیوتن-رفسون Newton-Raphson method

```
//Newton-Raphson method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>

double F(double x){return 100*sin(x)-x;}
double FPrime(double x){return 100*cos(x)-1;}
void main(){
	clrscr();
	double eps,x0,x;
	int n=1;
	cout<<"Enter x0,eps";
	cin>>x0>>eps;
	x=x0-F(x0)/FPrime(x0);
	while(fabs(F(x))>=eps){
	     cout<<x<<"\n";
	     x0=x;
	     x=x0-F(x0)/FPrime(x0);
	     n++;
	}
	cout<<"ROOT = "<<x;
	cout<<"\nITERATION = "<<n;
	getch();
}
```

۶- انتگرال‌گیری به روش ذوزنقه‌ای Trapezoid integration

```
// Trapezoid integration

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return exp(x);}

void main(){
       double a,b,n,s,h;
       cout<<"Enter a,b,n";
       cin>>a>>b>>n;
       s=(F(a)+F(b))/2;
       h=(b-a)/n;
       for(int i=1;i<n;i++){
              s=s+F(a+i*h);
       }
       s=s*h;
       cout<<"Integral = "<<s;
}
```

۷- روش انتگرالگیری سیمپسون **Simpon's method**

```
//Simpson's Method

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return sqrt(x);}

void main(){
       double a,b,n,s=0,h,h2,h3;
       cout<<"Enter a,b,n";
       cin>>a>>b>>n;
       h=(b-a)/n;
       h2=h/2;
       h3=F(a+h2);
       for(int i=1;i<n;i++){
              s=s+F(a+i*h);
              h3=h3+F(a+i*h+h2);
       }
       s=h/6*(F(a)+4*h3+2*s+F(b));
       cout<<"Integral = "<<s;
}
```

۸- روش انتگرالگیری گاوس دونقطه‌ای Gaussian Rule (2-point method)

```
//Gaussian Rule(2-point Method)

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return sin(x);}
double g(double x){return M_PI*sin((M_PI*(x+1))/4)/4;}

void main(){
      double s=0;
      double p[2]={-0.577350269,0.577350269};
      for(int i=0;i<2;i++){
            s=s+g(p[i]);
      }
      cout<<"Integral = "<<s;
}
```

۹- روش انتگرالگیری گاوس سه‌نقطه‌ای — Gaussian Rule (3-point method)

```
//Gaussian Rule(3-point Method)

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return sin(x);}
double g(double x){return M_PI*sin(M_PI*(x+1)/4)/4;}

void main(){
	double s=0;
	double p[3],w[3];
	p[0]=-0.77459667;
	p[1]=0.;
	p[2]=-p[0];
	w[0]=5./9.;
	w[1]=8./9.;
	w[2]=w[0];
	for(int i=0;i<3;i++){
		s=s+w[i]*g(p[i]);
	}
	cout<<"Integral = "<<s;
}
```

۱۰- روش حذف گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی **Gauss method**

```
//Gause Method

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

void main(){
     double a[10][10],x[10],m,k,g;
     int n,i,j,t;

     for(i=0;i<10;i++){
            x[i]=0;
     }
     cout<<"Enter the nomber of matrix :";
     cin>>n;
     cout<<"Enter Matrix A:\n";
     cout.precision(5);

     for(i=0;i<n;i++)
          for(j=0;j<n+1;j++)
            cin>>a[i][j];
     for(i=0;i<n-1;i++){
          for(j=i+1;j<n;j++)
               if(fabs(a[i][i])<fabs(a[j][i])){
                    for(t=0;t<=n;t++){
                         k=a[i][t];
                         a[i][t]=a[j][t];
                         a[j][t]=k;
                    }
               }
          for(j=i+1;j<n;j++){
               g=-a[j][i]/a[i][i];
               if(g!=0)
                 for(t=i;t<=n;t++){
                         a[j][t]=a[i][t]*g+a[j][t];
               }
          }
     }
     for(j=n-1;j>=0;j--){
               g=a[j][j];
               m=0;
               for(t=j+1;t<n;t++){
                         m=m+a[j][t]*x[t];
               }
               if(g!=0)x[j]=(a[j][n]-m)/g;
     }

     for(i=0;i<n;i++)
       cout<<"x["<<i<<"]="<<x[i]<<" \n" ;
}
```

۱۱- روش تکراری گاوس - سایدل برای حل دستگاه معادلات خطی Gauss - Seidel

```
//Gauss-Seidel

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

void main(){
     double a[10][10];
     double y[10],x[10],m[10],k,g,d,u;
     int n,i,j,t,p,l,c=0,s=0,r=1;

     for(i=0;i<10;i++){
             x[i]=0;
             y[i]=1;
             m[i]=0;
     }
     cout<<"Enter the nomber of matrix :";
     cin>>n;
     cout<<"Enter error :";
     cin>>u;
     cout<<"Enter Matrix A:\n";
     cout.precision(5);

     for(i=0;i<n;i++)
         for(j=0;j<n+1;j++)
           cin>>a[i][j];

     for(i=0;i<n;i++){
          g=a[i][i];
          if(g!=0)
           for(j=0;j<n+1;j++)
              a[i][j]=(1/g)*(a[i][j]);
     }
     while(c<100000){
         c++;
         r=1;
         for(l=0;l<n;l++)
              r=r*(fabs(x[l]-y[l])<u) ;
         if(r==1)
           break;
         for(i=0;i<n;i++){
              g=a[i][n];
              x[i]=y[i];
              for(l=0;l<n;l++)
                  m[l]=0;
              for(j=0;j<n;j++){
                  if(i!=j)
                     m[i]=m[i]+a[i][j]*y[j];
              }
              y[i]=(g-m[i]);
         }
     }
     for(i=0;i<n;i++)
       cout<<"x["<<i<<"]="<<x[i]<<" \n" ;

     cout<<"the nomber of stage is :"<<c;
}
```

۱۲- روش اویلر برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول **Euler method**

```
//Euler method

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F(double x,double y){return x+y;}
void main(){
 double x,y,x0,y0,h,M;
 cout<<"Enter x0,y0,h,M\n";
 cin>>x0>>y0>>h>>M;
 x=x0;
 y=y0;
 cout<<"\nx\ty";
 cout<<"\n----------"<<'\n'<<x<<'\t'<<y;
 for(int i=1;i<=M;i++) {
      y=y+h*F(x,y);
      x=x+h;
      cout<<'\n'<<x<<'\t'<<y;
 }
}
```

۱۳- روش مرتبه دوم رونگه - کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

```
// Second order Runge-Kutta method for solving the following problem
// y'=f(x,y),   y(x0)=y0

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F(double x,double y){return x+y;}

void main(){
 double x,y,x0,y0,h,M,k1,k2,z;
 cout<<"Enter x0,y0,h,M\n";
 cin>>x0>>y0>>h>>M;
 x=x0;
 y=y0;
 cout<<"\nx\ty";
 cout<<"\n-----------"<<'\n'<<x<<'\t'<<y;
 for(int i=1;i<=M;i++) {
     k1=h*F(x,y);
     x=x+h;
     z=y+k1;
     k2=h*F(x,z);
     y=y+(k1+k2)/2;
     cout<<'\n'<<x<<'\t'<<y;
 }
}
```

۱۴- روش مرتبه چهارم رونگه - کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

```
// Fourth order Runge-Kutta method for solving the following problem
// y'=f(x,y),  y(x0)=y0

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F(double x,double y){return x+y;}

void main(){
 double x,y,x0,y0,h,M,k1,k2,k3,k4,z;
 cout<<"Enter x0,y0,h,M\n";
 cin>>x0>>y0>>h>>M;
 x=x0;
 y=y0;
 cout<<"\nx\ty";
 cout<<"\n----------"<<'\n'<<x<<'\t'<<y;
 for(int i=1;i<=M;i++) {
      k1=h*F(x,y);
      x=x+0.5*h;
      z=y+0.5*k1;
      k2=h*F(x,z);
      z=y+0.5*h;
      k3=h*F(x,z);
      x=x+0.5*h;
      z=y+k3;
      k4=h*F(x,z);
      y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
      cout<<'\n'<<x<<'\t'<<y;
  }
}
```

CamScanner

۱۵- روش مرتبه چهارم رونگه - کوتا برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

```
// Fourth Order Runge-Kutta method for solving the following problem
// y'=f1(x,y,p),p'=f2(x,y,p),    y(x0)=y0,p(x0)=p0

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F1(double x,double y,double p){return p;}
double F2(double x,double y,double p){return -101*p-100*y;}

void main(){
 long double x,y,p,x0,y0,p0,h,M,k1,k2,k3,k4,z,l1,l2,l3,l4,w;
 cout<<"Enter x0,y0,p0,h,M\n";
 cin>>x0>>y0>>p0>>h>>M;
 x=x0;
 y=y0;
 p=p0;
 cout.precision(5);
 for(int i=1;i<=M;i++) {
     k1=h*F1(x,y,p);
     l1=h*F2(x,y,p);

     x=x+0.5*h;
     z=y+0.5*k1;
     w=p+0.5*l1;
     k2=h*F1(x,z,w);
     l2=h*F2(x,z,w);

     z=y+0.5*k2;
     w=p+0.5*l2;
     k3=h*F1(x,z,w);
     l3=h*F2(x,z,w);

     x=x+0.5*h;
     z=y+k3;
     w=p+l3;
     k4=h*F1(x,z,w);
     l4=h*F2(x,z,w);

     y=y+(k1+2.*k2+2.*k3+k4)/6.;
     p=p+(l1+2.*l2+2.*l3+l4)/6.;

     cout<<"\n\nx\ty\tp\t\n------------------------"<<'\n'<<x<<'\t'<<y<<'\t'<<p<<'\n';
     cout<<"\n\tk1="<<k1<<"\tk2="<<k2<<"\tk3="<<k3<<"\tk4="<<k4<<'\n';
     cout<<"\tl1="<<l1<<"\tl2="<<l2<<"\tl3="<<l3<<"\tl4="<<l4;
  }
```

فهرست راهنما

الف
اثر یا تریس یک ماتریس ۱۴۸
استفاده از وارون ماتریس برای حل دستگاه ۱۶۱
الگوریتم ۱
الگوریتم روش حل دستگاههای بالا مثلثی ۱۵۴
حذفی گاوس ۱۵۶
دو بخشی ۲۳
رونگه‌کوتای مرتبه چهار ۱۲۸
دو ۱۲۶
ب
بردار ستونی ۱۴۴
سطری ۱۴۴
بردار ویژه ۱۸۸
برنامه روش اویلر ۱۲۴
تکرار ساده برای حل معادله $F(x) = 0$ ۴۱
دوبخشی برای حل معادله $F(x) = 0$ ۲۳
ذوزنقه ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$ ۹۰
رونگه‌کوتای مرتبه چهار ۱۲۹
دو ۱۲۶
سیمپسون برای حل معادله $\int_a^b F(x)dx$ ۹۲
گاوس سه نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$ ۱۰۲
نابجایی برای حل معادله $F(x) = 0$ ۲۸
نیوتن برای حل معادله $F(x) = 0$ ۳۲
وتری برای حل معادله $F(x) = 0$ ۳۸
برونیابی ۴۹
ت
تابع جدولی ۵۰
ترانهاده یک ماتریس ۱۴۷
تساوی دو ماتریس ۱۴۲
تقریب اضافی ۲
تقریب نقصانی ۲
تفاضل پسرو ۶۷
نیوتن ۶۸
تفاضل پیشرو ۶۴
نیوتن ۶۵
چ
چند جمله‌ای درونیاب ۵۱
ح
حداکثر خطا در حاصلضرب سه عدد تقریبی ۱۰
خ
خصوصیات مقادیر ویژه ۱۸۹
خطای اولیه ۶
باقیمانده یا برشی ۱۴،۶
تفاضل ۷
حاصل جمع ۷
حاصلضرب ۹
روش سیمپسون ۱۱۲
عملیات ۶
قاعده نقطه میانی ۱۱۳
گرد کردن ۶
محاسبه توابع ۱۴
محاسبه فرمولها ۱۲
مطلق ۳
حدی ۳
نسبی ۵
د
دترمینان ۱۴۹
درونیابی ۴۹
دستگاه تکرار ژاکوبی ۱۶۵
گاوس‌سایدل ۱۶۷

همگن ۱۶۲
ر
روش توانی ۲۰۱
حذفی گاوس ۱۵۵
ژاکوبی ۱۶۴
ضرایب مجهول ۹۷
گاوس ۹۷
گاوس دو نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$ ۹۹
گاوس‌ـسایدل ۱۶۷
ش
شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده ۴۱
ض
ضرب دو ماتریس ۱۴۴
عدد در ماتریس ۱۴۳
ع
عملیات سطری مقدماتی ۱۵۳
ف
فرمول چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات
پسرو ۶۹
پیشرو ۶۶
تقسیم شده نیوتن ۵۸
دو نقطه‌ای گاوس ۹۸
سه نقطه‌ای گاوس ۱۰۱
فرمولهای باز ۱۰۶
بسته ۱۰۶
ق
قضیه کیلی‌ـهامیلتون ۱۹۳
م
ماتریس بالا مثلثی ۱۴۶
پایین مثلثی ۱۴۶
صفر ۱۴۵
قطری ۱۴۵
معکوس پذیر ۱۴۷
مربع ۱۴۲
منفرد ۱۴۷
نامنفرد ۱۴۷
واحد ۱۴۵
محورگیری ۱۵۹، ۱۶۱
معادلات نرمال ۲۱۱
معادله مفسر ۱۸۸
ن
نقطه منفرد ۱۰۳

پیوست ـ مسائل چهارگزینه‌ای

این پیوست شامل سه قسمت است. در قسمت اول ۶۱ مسئله چهارگزینه‌ای با پاسخهای تشریحی ارائه شده است. در همین قسمت دو بحث بیان نشده درکتاب به طور مفصل تشریح شده است. این مباحث عبارتند از مرتبه همگرایی برای روشهای تکراری و انتگرال‌گیری به شیوه رامبرگ (به مسائل ۴۸ و ۵۶ مراجعه نمایید.)

در قسمت دوم مسائل چهارگزینه‌ای آزمون کارشناسی ارشد سال‌های مختلف با پاسخ‌های تشریحی ارائه شده‌اند.

نهایتاً در قسمت سوم، برای تمرین بیشتر، مسائل چهارگزینه‌ای ابتدا بدون پاسخ در اختیار شما قرار گرفته است که حل آنها به صورت جداگانه در قسمت چهارم این پیوست ارائه شده است.

قسمت اول (مسائل چهارگزینه‌ای حل شده)

۱ـ اگر اعداد $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۷}$ را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم با توجه به خطای حاصل چه بازه‌ای برای $\sqrt{۷}-\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید؟

۱) $[۰/۹۱۳۲, ۰/۹۱۳۴]$ ۲) $[۰/۹۱۳۶, ۰/۹۱۳۸]$ ۳) $[۰/۹۱۳۸, ۰/۹۱۴۰]$ ۴) $[۰/۹۱۲۸, ۰/۹۱۳۰]$

حل:

$$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۱ + e_۱, \qquad e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\sqrt{۷} = ۲/۶۴۵۸ + e_۲, \qquad e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\sqrt{۷} - \sqrt{۳} = ۰/۹۱۳۷ + e_۳$$

که در آن $e_۳ \leq e_۱ + e_۲$ لذا $e_۳ \leq ۱۰^{-۴}$ بنابراین

$$۰/۹۱۳۷ - ۱۰^{-۴} \leq \sqrt{۷} - \sqrt{۳} \leq ۰/۹۱۳۷ + ۱۰^{-۴}$$

$$۰/۹۱۳۶ \leq \sqrt{۷} - \sqrt{۳} \leq ۰/۹۱۳۸$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۲ـ اگر اعداد را تا چهار رقم اعشار محاسبه کنیم حداکثر خطای محاسبهٔ $\pi\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) $۱/۸۲۲۵۱ \times ۱۰^{-۴}$ ۲) $۱/۹۷۲۳۱ \times ۱۰^{-۴}$

۳) $۲/۱۲۴۵۷ \times ۱۰^{-۴}$ ۴) $۲/۴۳۶۸۵ \times ۱۰^{-۴}$

حل:

$$\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_\pi, \qquad e_\pi \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴},$$

$$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۱ + e_{\sqrt{۳}}, \qquad e_{\sqrt{۳}} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴},$$

$$\pi\sqrt{۳} = (۳/۱۴۱۶ \times ۱/۷۳۲۱) + e_۱,$$

که در آن بنا به رابطهٔ (۳) فصل اول

$$e_۱ \leq ۳/۱۴۱۶ e_{\sqrt{۳}} + ۱/۷۳۲۱ e_\pi$$

$$e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}(۳/۱۴۱۶ + ۱/۷۳۲۱)$$

$$e_۱ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} \times ۴/۸۷۳۷ = ۲/۴۳۶۸ \times ۱۰^{-۴}$$

اما $e_۲ + ۵/۴۴۱۶ = \pi\sqrt{۳}$ چون حاصل‌ضرب اعداد ۳/۱۴۱۶ و ۱/۷۳۲۱ در محاسبه $\pi\sqrt{۳}$ بیشتر از چهار رقم اعشار دارد، هنگام نمایش حاصل‌ضرب دو عدد مذکور با چهار رقم اعشار خطای دیگری مرتکب شده‌ایم و خطای حدی کل را با $e_۲$ نشان داده‌ایم، برای $e_۲$ داریم:

$$e_۲ \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_۱$$
$$e_۲ \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-۴} + ۲/۴۳۶۸ \times ۱۰^{-۴} = ۲/۴۳۶۸۵ \times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۳ـ اگر اعداد را تا سه رقم اعشار محاسبه کنیم حجم کره‌ای با شعاع $\frac{۷}{۳}$ کدام است؟

۱) ۵۳/۱۸۴ ۲) ۵۳/۲۱۳ ۳) ۵۳/۲۱۸ ۴) هیچکدام

حل:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = xyz^۳$$
$$x = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳۳ + e_x, \quad e_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$y = \pi = ۳/۱۴۲ + e_y, \quad e_y \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$z = \frac{۷}{۳} = ۲/۳۳۳ + e_z, \quad e_z \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$V = (۱/۳۳۳)(۳/۱۴۲)(۲/۳۳۳)^۳ + e_V$$
$$V = ۵۳/۱۸۴ + e'_V$$

که در آن مشابه مسأله ۲ داریم:

$$e'_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} + e_V$$

در اینجا داریم:

$$e_V \leq e_x\frac{\partial V}{\partial x} + e_y\frac{\partial V}{\partial y} + e_z\frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در $(۱/۳۳۳, ۳/۱۴۲, ۲/۳۳۳)$ محاسبه کرد. لذا

$$e_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}\{yz^۳ + xz^۳ + ۳xyz^۲\}$$

مقدار سمت راست به‌ازای $x = ۱/۳۳۳$، $y = ۳/۱۴۲$ و $z = ۲/۳۳۳$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$e_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲}\{۳۹/۸۹۸ + ۱۶/۹۲۷ + ۶۸/۳۸۹\}$$

$$e_V \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲} \times ۱۲۵/۲۱۴$$

$$e_V \leq ۰/۰۶۲۶$$

لذا $e'_V \leq ۰/۰۶۳$ و از آن

$$V = ۵۳/۱۸۴ + e'_V \Rightarrow V = ۵۳/۱۸۴ \pm ۰/۰۶۳۱$$

با محاسبه دو مقدار فوق هیچکدام از گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ صحیح نیست لذا گزینه (۴) صحیح است.

۴ـ در تست قبل حداکثر خطای محاسبه حجم کره کدام است؟

۱) ۰/۰۵۹ ۲) ۰/۰۶۳ ۳) ۰/۰۶۷ ۴) ۰/۰۶۹

حل: با توجه به محاسبات در تست قبل داریم $e'_V \leq ۰/۰۶۳$ لذا گزینه (۲) صحیح است.

۵ـ در تابع $f = xy^۲z^۳$ اگر خطای مطلق متغیرها Δx، Δy و Δz باشند خطای نسبی f تقریباً با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$ ۲) $\frac{\Delta x}{x}\frac{\Delta y}{y}\frac{\Delta z}{z}$

۳) $\frac{\Delta x}{x} + ۲\frac{\Delta y}{y} + ۳\frac{\Delta z}{z}$ ۴) $y^۲z^۳\frac{\Delta x}{x} + ۲xz^۳\Delta y + ۳xy^۲z\Delta x$

حل: با توجه به رابطه (۵) فصل اول و با به‌کارگیری خطای نسبی به‌جای خطای مطلق حدی داریم.

$$\frac{\Delta f}{f} \leq \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{y} + \frac{\partial f}{z}\frac{\Delta z}{z}$$

از اینکه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^۲z^۳,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = ۲xyz^۳,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = ۳xy^۲z^۲$$

لذا

$$\frac{\Delta f}{f} \leq y^۲z^۳\frac{\Delta x}{x} + ۲xyz^۳\frac{\Delta y}{y} + ۳xy^۲z^۲\frac{\Delta z}{z}$$

و از آن

$$\frac{\Delta f}{f} \leq y^۲z^۳\frac{\Delta x}{x} + ۲xz^۳\Delta y + ۳xy^۲z\,\Delta z$$

در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۶ـ در تابع $y = ۵^x$ نسبت خطای نسبی y به خطای مطلق x کدام است؟

۱) $\ln ۵$ ۲) ۵ ۳) $x \ln ۵$ ۴) $۵x$

حل:

$$y = ۵^x \Rightarrow e_y = \frac{dy}{dx} e_x = \ln ۵ \times ۵^x \times e_x$$
$$\text{خطای نسبی } y = \frac{e_y}{y} = \frac{\ln ۵ \times ۵^x \times e_x}{۵^x} = e_x \ln ۵$$

بنابراین $\frac{\text{خطای نسبی } y}{e_x}$ برابر است با $\ln ۵$ لذا گزینه (۱) صحیح است.

۷ـ در محاسبهٔ تابع $y = x \ln x$، به‌ازای $x = \pi$ و $\pi = ۳/۱۴۲$ خطای مطلق حداکثر چند است؟

۱) $۳/۵۱ \times ۱۰^{-۳}$ ۲) $۳/۵۹ \times ۱۰^{-۳}$ ۳) $۱/۱۷ \times ۱۰^{-۳}$ ۴) $۱/۰۷۲ \times ۱۰^{-۳}$

حل:

$$e_y \leq \frac{dy}{dx} e_x = (\ln x + ۱) e_x \leq (\ln ۳/۱۴۲ + ۱) \times \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$
$$e_y \leq ۱/۰۷۲ \times ۱۰^{-۳}$$

دقت کنید که با توجه به تستهای قبل داریم $e_x \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۸ـ در محاسبهٔ $w = x \sin \ln z$، به‌ازای $x = ۲۱/۰۰$، $y = ۰/۸۶$ و $z = ۵/۶$ حداکثر خطای مطلق کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۷ ۳) ۰/۲۱ ۴) هیچکدام

حل:

$$e_w \leq \frac{\partial w}{\partial x} e_x + \frac{\partial w}{\partial y} e_y + \frac{\partial w}{\partial z} e_z$$
$$\leq \sin y \ln z \, e_x + x \cos y \ln z \, e_y + \frac{x}{z} \sin y \, e_z$$
$$\leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲} \left\{ \sin(۰/۸۶) \ln(۵/۶) + ۲۱/۰۰ \cos(۰/۸۶) \ln(۵/۶) + \frac{۲۱}{۵/۶} \sin(۰/۸۶) \right\}$$
$$= \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۲} \{ ۰/۷۶(۱/۷۲) + ۲۱ \times ۰/۶۵ \times ۱/۷۲ + ۳/۷۵ \times ۰/۷۶ \}$$
$$۱۳/۸۱۷۶ \times ۱۰^{-۲} \simeq ۰/۱۴$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۹ـ می‌خواهیم مقدار تقریبی $\cos x$ را با استفاده از سری مک لورن آن به‌ازای $x = \frac{\pi}{۹}$ و با دقت سه رقم اعشار به‌دست آوریم. به چند جمله از بسط فوق نیاز داریم؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

حل:

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} \pm \cdots$$

بایستی

$$\frac{x^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!} \leq \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} \quad , \quad x = ۰/۳۴۹$$

رابطه فوق به‌ازای $n = ۱$ بر قرار نیست اما به‌ازای $n = ۲$ برقرار است بنابراین با تقریب موردنظر $\cos x$ عبارت است از

$$\cos x \simeq ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}$$

لذا سه جمله از سری مورد نیاز است در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۱۰ـ در تست قبل مقدار تقریبی $\cos \frac{\pi}{۹}$ کدام گزینه است؟

۱) ۰/۹۳۴　　۲) ۰/۹۳۶　　۳) ۰/۹۳۷　　۴) ۰/۹۴۰

حل: با توجه به تست قبل برای $x = ۰/۳۴۹$ مقدار تقریبی $\cos x$ عبارت است از

$$\cos \frac{\pi}{۹} \simeq ۱ - \frac{(۰/۳۴۹)^۲}{۲} + \frac{(۰/۳۴۹)^۴}{۲۴} = ۰/۹۴۰$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۱۱ـ محاسبه انتگرال $I = \int_{۲/۲}^{۳/۴} e^x dx$ با استفاده از قاعده ذوزنقه خواسته شده است. در صورتی که بخواهید قدرمطلق ماکزیمم خطای حاصل از محاسبه این انتگرال کمتر از $۱۰^{-۵}$ باشد ماکزیمم مقدار گام h برابر است با:

۱) $e^{-۳/۳} \times ۱۰^{-۲}$　　۲) $e^{-۱/۷} \times ۱۰^{-۱}$　　۳) $۱۰^{-۲} \times e^{-۳/۴}$　　۴) $۱۰^{-۲} \times e^{-۱/۷}$

حل:

$$|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{۱۲} h^۲ M_۲$$

که در آن M_2 کران بالایی برای $f''(x)$ در فاصله $[2/2, 3/4]$ است، یعنی $|f''(x)| \leq M_2$ داریم:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$$

چون تابع $f''(x) = e^x$ صعودی است لذا بر فاصله $[2/2, 3/4]$ داریم $|f''(x)| \leq e^{3/4}$

$$|ET(h)| \leq \frac{3/4 - 2/2}{12} \times h^2 \times e^{3/4}$$

می‌خواهیم مقدار سمت راست از 10^{-5} کمتر باشد لذا بایستی

$0/1 h^2 e^{3/4} \leq 10^{-5} \Rightarrow h^2 \leq 10^{-4} e^{-3/4}$

بنابراین بایستی

$$h \leq 10^{-2}\sqrt{e^{-3/4}} = 10^{-2} e^{\frac{-3/4}{2}} \Rightarrow h \leq 10^{-2} e^{-1/7}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۱۲ـ برای محاسبه $f'(x_0)$ از فرمول تقریبی زیر استفاده می‌کنیم:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

خطای برشی این فرمول برابر است با:

۱) $\frac{-h^2}{3} f^{(3)}(z)$ ۲) $\frac{-h^2}{6} f^{(3)}(z)$ ۳) $\frac{h^2}{3} f^{(3)}(z)$ ۴) $\frac{h^2}{6} f^{(3)}(z)$

حل: با توجه به بسط تیلور داریم

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(z)$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2} f''(x_0) + \frac{8h^3}{6} f''(z)$$

بنابراین $\frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} = f'(x_0) - \frac{1}{3} h^2 f'''(z)$ در نتیجه

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 f'''(z)$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۱۳ـ حداکثر درجه چندجمله‌ای گذرنده از نقاط $(4, 22)$، $(3, 14)$، $(2, 8)$، $(1, 4)$، $(0, 2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل: چون نقاط x_i متساوی‌الفاصله هستند لذا جدول تفاضلات به‌صورت زیر خواهد بود:

		تفاضلات مرتبه			
x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
۰	۲				
		۲			
۱	۴		۲		
		۴		۰	
۲	۸		۲		۰
		۶		۰	
۳	۱۴		۲		
		۸			
۴	۲۲				

چون تفاضل‌های مرتبه سوم به بعد صفر هستند لذا درجه چندجمله‌ای موردنظر ۲ می‌باشد. در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۱۴ـ اگر $f(x) = a.x^n$ در این‌صورت تفاضل مرتبه nام $\Delta^n f(x)$ کدام است؟ (h فاصله بین مقادیر متوالی x در دورنیابی می‌باشد)

۱) $a.h^n$ ۲) $a.nh$ ۳) $a.n!h^n$ ۴) تابعی از x است

حل: هرگاه $f(x) = x^n$ می‌توان نشان داد $\Delta^n f(x) = n!h^n$ لذا برای $f(x) = a.x^n$ داریم $\Delta^n f(x) = a.n!h^n$ و از آن گزینه (۳) صحیح است.

۱۵ـ اگر دنبالهٔ $x_0, x_1, \dots, x_{10}$ نقاط متساوی الفاصله با فاصلهٔ h از هم باشند و $f_i = f(x_i)$ در اینصورت $\Delta^{10} f_2$ برابر کدام است؟

۱) صفر

۲) $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} f_{12-k}$

۳) $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} f_{10-k}$

۴) $\sum_{k=0}^{7} (-1)^k \binom{10}{k} f_{10-k}$

حل: داریم $\Delta^n f_i = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f_{i+n-k}$ لذا

$$\Delta^{10} f_2 = \sum_{k=0}^{10}(-1)^k \binom{10}{k} f_{12-k}$$

و گزینه (۲) صحیح است.

۱۶ـ با داشتن نقاط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_5, f_5)$ و با فرض $x_{i+1} = x_i + h$ اگر برای درونیابی مقدار تابع در $x = x_0 + \alpha h$ از چند جمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن استفاده کنیم و فرض کنیم ماکزیمم $f^{(n+1)}(x)$ برابر با M باشد آنگاه حداکثر مقدار خطا برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-5)\right| M$

۲) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-5)\right| M^5$

۳) $\left|\frac{h^6}{6!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-5)\right| M$

۴) $\frac{hM}{5}$

حل: با توجه به رابطه (۱۳) فصل سوم داریم:

$$\text{خطا} \leq |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_5)|\frac{M}{(5+1)!}$$

حال اگر $x = x_0 + \alpha h$ در این‌صورت

$$\text{خطا} \leq |\alpha h(\alpha-1)h(\alpha-2)h\ldots(\alpha-5)h|\frac{M}{6!}$$
$$= \left|\frac{h^6}{6!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-5)\right| M$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۱۷ـ در تست قبل اگر از چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن استفاده کنیم ماکزیمم خطا کدام است؟

۱) $\left|\frac{h^4}{4!}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+5)\right| M$

۲) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+5)\right| M$

۳) $\left|\frac{h^5}{5!}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+5)\right| M^5$

۴) $\left|\frac{h^6}{6!}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+5)\right| M$

حل: در این حالت داریم $x = x_0 + \alpha h$ لذا با توجه به رابطه خطا یعنی

$$
\begin{aligned}
\text{خطا} &\leq |(x - x_0)\dots(x - x_5)|\frac{M}{6!} \\
&= |(\alpha + 5)h(\alpha + 4)h\dots(\alpha + 1)h\alpha h|\frac{M}{6!} \\
&= \left|\frac{h^6}{6!}\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + 5)\right| M
\end{aligned}
$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۱۸ـ اگر برای درونیابی داده‌های زیر از $P(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)f_k$ استفاده کنیم که $L_k(x)$ چند جمله‌ای لاگرانژ می‌باشد در این‌صورت $L_1(x)$ کدام است؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	-2	-1	0	7

۱) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2}$
۲) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$
۳) $\frac{x^3 - x}{6}$
۴) $\frac{x^3 - 1}{2}$

حل:

$$
\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\
&= \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{2} \\
&= \frac{x^3 - 2x - x + 2}{2}
\end{aligned}
$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۱۹ـ اگر در تست قبل نقطهٔ $(-3, -8)$ را به نقاط اضافه کنیم مقدار $L_2(0)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -1
۴) ۲

حل: در رابطه با چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_i(x)$ همواره داریم:

$$
L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}
$$

حال اگر نقطه $(-۳,-۸)$ را به جدول تست ۱۸ اضافه کنیم داریم $x_۲ = ۰$ لذا

$$L_۲(۰) = L_۲(x_۲) = ۱$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۲۰ـ با توجه به مقادیر داده شده، مقدار تقریبی تابع در $x = ۲$ کدام است.

x_i	۰	۳	۴	۷
$f(x_i)$	۲	۸	۹	۶

۱) ۵ ۲) ۵/۳ ۳) ۶/۳ ۴) صفر

حل: با استفاده از درونیابی لاگرانژ داریم

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f_۰L_۰(x) + f_۱L_۱(x) + f_۲L_۲(x) + f_۳L_۳(x) \\ &= ۲\frac{(x-۳)(x-۴)(x-۷)}{(۰-۳)(۰-۴)(۰-۷)} + ۸\frac{(x-۰)(x-۴)(x-۷)}{(۳-۰)(۳-۴)(۳-۷)} + \\ &\quad ۹\frac{(x-۰)(x-۳)(x-۷)}{(۴-۰)(۴-۳)(۴-۷)} + ۶\frac{(x-۰)(x-۳)(x-۴)}{(۷-۰)(۷-۳)(۷-۴)} \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} f(۲) &\simeq ۲\frac{(۲-۳)(۲-۴)(۲-۷)}{-۸۴} + ۸\frac{۲۰}{۱۲} + ۹\frac{۱۰}{-۱۲} + ۶\frac{۴}{۸۴} \\ &= \frac{۵}{۲۱} + \frac{۴۰}{۳} - \frac{۱۵}{۲} + \frac{۲}{۷} = ۶/۳۵۷\ldots \end{aligned}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده گزینه (۳) صحیح است

راه حل دوم: هرگاه جدول تفاضلات تقسیم‌شده را تشکیل دهیم داریم:

x_i	f_i			
۰	۲			
		۲		
۳	۸		$-۰/۲۵$	
		۱		$-\frac{۱}{۲۸}$
۴	۹		$-۰/۵$	
		-۱		
۷	۶			

بنابراین

$$P(x) = ۲ + ۲x - ۰/۲۵x(x-۳) - \frac{۱}{۲۸}x(x-۳)(x-۴) \Rightarrow P(۲) \simeq ۶/۳$$

۲۱ـ مقدار خطا در محاسبه $\sqrt{۹۰}$ با استفاده از درونیابی لاگرانژ و با درنظر گرفتن نقاط $x_۱ = ۸۱, x_۲ = ۱۰۰, x_۳ = ۱۲۱$ در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ حداکثر کدام است؟

۱) $۱/۵۲ \times ۱۰^{-۳}$ ۲) $۱/۷۵ \times ۱۰^{-۳}$ ۳) $۲/۹۵ \times ۱۰^{-۳}$ ۴) $۴/۲ \times ۱۰^{-۳}$

حل: چون سه نقطه برای درونیابی وجود دارد، لذا خطای درونیابی به‌صورت زیر است

$$\text{خطا} \leq |(x - x_۱)(x - x_۲)(x - x_۳)| \frac{M}{۳!}$$

که در آن $x = ۹۰$ و M کران بالای تابع $f'''(x)$ در فاصله $[۸۱, ۱۲۱]$ است. داریم:

$$f(x) = x^{۱/۲} \quad f'(x) = \frac{۱}{۲}x^{-۱/۲}$$
$$f''(x) = -\frac{۱}{۴}x^{-۳/۲} \quad f'''(x) = \frac{۳}{۸}x^{-۵/۲} = \frac{۳}{۸x^۲\sqrt{x}}$$

بنابراین حداکثر مقدار f''' در فاصله $[۸۱, ۱۲۱]$ عبارت است از:

$$f'''(۸۱) = \frac{۳}{۸} \times ۱/۶۹۳۵ \times ۱۰^{-۵} = ۶/۳۵ \times ۱۰^{-۶} = M$$

همچنین داریم $x = ۹۰$ بنابراین $|(۹۰ - ۸۱)(۹۰ - ۱۰۰)(۹۰ - ۱۲۱)| = ۲۷۹۰$ لذا

$$\text{خطا} \leq ۲۷۹۰ \times \frac{۶/۳۵ \times ۱۰^{-۶}}{۶} = ۲/۹۵ \times ۱۰^{-۳}$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۲۲ـ جدول زیر را درنظر بگیرید اگر مقادیر $f(-۱/۵)$ و $f(۲/۲)$ را با برونیابی خطی از روی این اعداد به‌دست آوریم مقدار $f(۲/۲) - f(-۱/۵)$ کدام است؟

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۰	-۱	۲	۹

۱) ۹/۹ ۲) ۱۰/۱ ۳) ۱۰/۵ ۴) ۱۱

حل: با توجه به رابطهٔ (۱۵) فصل چهارم داریم:

$$f(-۱/۵) \simeq f_۰ + \frac{\bar{x} - x_۰}{x_۱ - x_۰}(f_۱ - f_۰)$$

که در آن $\bar{x} = -۱/۵$ لذا

$$f(-۱/۵) \simeq ۰ + \frac{-۱/۵ - (-۱)}{۰ + ۱}(-۱ - ۰) = ۰/۵$$

همچنین با توجه به رابطه (۱۶) فصل چهارم داریم:

$$f(۲/۲) \simeq f_{n-۱} + \frac{\bar{x} - x_{n-۱}}{x_n - x_{n-۱}}(f_n - f_{n-۱})$$

که در آن $\bar{x} = ۲/۲$ و $n = ۳$ لذا

$$f(۲/۲) \simeq ۲ + \frac{۲/۲ - ۱}{۲ - ۱}(۹ - ۲) = ۱۰/۴$$

بنابراین $f(۲/۲) - f(-۱/۵) = ۹/۹$ در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۲۳ـ برای به‌دست آوردن ریشه معادله $x^۲ - ۴x + ۴ = ۰$ از روش نیوتن استفاده می‌کنیم، در این‌صورت کدام درست است؟

۱) همگرایی این روش به انتخاب مقدار اولیه $x_۰$ وابسته است و $x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}x_n + ۱$ می‌باشد.

۲) همگرایی این روش به انتخاب مقدار اولیه $x_۰$ وابسته است و $x_{n+۱} = \frac{۱}{۴}x_n + ۱$ می‌باشد.

۳) این روش همواره همگرا است و $x_{n+۱} = \frac{۱}{۴}x_n + ۱$ می‌باشد.

۴) این روش همواره همگرا است و $x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}x_n + ۱$ می‌باشد.

حل: فرمول تکرار روش نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^۲ - ۴x_n + ۴}{۲x_n - ۴} = \frac{x_n^۲ - ۴}{۲(x_n - ۲)} \Rightarrow x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}x_n + ۱$$

هر چند در این مسأله $f(۲) = f'(۲) = ۰$ یعنی ۲ ریشه تکراری معادله است اما با توجه به فرمول تکرار به‌دست آمده روش نیوتن همواره همگراست. زیرا هرگاه روش تکرار را با $g(x) = \frac{۱}{۲}x + ۱$ درنظر بگیریم در اینصورت $|g'(x)| = \frac{۱}{۲} < ۱$ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۲۴ـ روش نیوتن را برای معادله $f(x) = ۳x + \sin x - e^x = ۰$ به‌کار می‌بریم. اگر مقدار اولیه $x_۰ = ۰$ را درنظر بگیریم مقدار $x_۲$ کدام است؟

۱) ۰/۳۶۳۰۱۷ ۲) ۰/۳۶۱۲۰۷ ۳) ۰/۳۷۳۰۱۲ ۴) ۰/۳۶۰۱۷۱

حل: داریم

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{۳x_n + \sin x_n - e^{x_n}}{۳ + \cos x_n - e^{x_n}}$$

لذا با $x_۰ = ۰$ مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ عبارتند از:

$$x_۱ = ۰/۳۳۳۳۳۳۳ x_۲ = ۰/۳۶۰۱۷۰۷$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۲۵ـ اگر ریشه معادله $x^۲ = c$ را با یک روش همگرا به‌دست آوریم و x_n تقریب ریشه در مرحلهٔ nام باشد مقدار خطای $|x_n - \sqrt{c}|$ تقریباً برابر کدام است؟

۱) $\left|\frac{c}{x_n}\right|$ ۲) $\left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$ ۳) $\left|x_n - \frac{\sqrt{c}}{x_n}\right|$ ۴) $\frac{۱}{۲}\left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$

حل:

$$|x_n - \sqrt{c}| = \left|(x_n - \sqrt{c})\frac{x_n + \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}}\right|$$
$$= \frac{|x_n^۲ - c|}{|x_n + \sqrt{c}|} \simeq \frac{|x_n^۲ - c|}{|x_n + x_n|} = \frac{|x_n^۲ - c|}{|۲x_n|} = \frac{۱}{۲}\left|x_n - \frac{c}{x_n}\right|$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۲۶ـ تقریبی از ریشه معادله $x^۳ + x - ۱ = ۰$ راکه در فاصله (۰ , ۱) قرار دارد با روش دو بخشی به‌دست آورید به‌طوری که خطا کمتر از ۰/۰۲ باشد.

۱) ۰/۶۸۷۵ ۲) ۰/۶۸۲۵ ۳) ۰/۶۸۱۵ ۴) ۰/۶۸۵۰

حل:

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{۲}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰/۵	+	−۰/۳۷۵
۲	۰/۵	۱	۰/۷۵	−	۰/۱۷۱۸۸
۳	۰/۵	۰/۷۵	۰/۶۲۵	+	−۰/۱۳۰۸۶
۴	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۰/۶۸۷۵۰	−	−۰/۰۱۲۴۵

با توجه به اینکه $|f(x_۴)| < ۰/۰۲$ لذا $x_۴$ تقریبی از ریشه است. و $\alpha \simeq ۰/۶۸۷۵$. یعنی گزینه (۱) صحیح است.

۲۷ـ تقریبی از ریشه معادله $f(x) = ۳x - e^{-x}$ را با روش نابجایی به‌دست می‌آوریم. اگر این ریشه در فاصله (۰/۲۵ و ۰/۲۷) قرار داشته باشد و محاسبات را تا $|f(x_n)| < ۲ \times ۱۰^{-۴}$ ادامه دهیم برای رسیدن به این تقریب با روش نابجایی چند مرحله انجام می‌شود؟

۱) ۴ مرحله ۲) ۳ مرحله ۳) ۲ مرحله ۴) ۱ مرحله

این مسأله، مثال ۴ فصل سوم کتاب می‌باشد لذا با توجه به آن مثال، گزینه (۴) صحیح است.

۲۸ـ برای به‌دست آوردن ریشه معادله $x^۲ + x - ۱ = ۰$ روش وتری را ۴ مرحله انجام می‌دهیم. تقریبی که پس از ۴ مرحله از روش وتری به‌دست می‌آید کدام است؟ (ریشه در بازهٔ (۰ , ۱) است.)

۱) ۰/۶۸۲۱ ۲) ۰/۶۷۹۷ ۳) ۰/۶۸۷۵ ۴) ۰/۶۹۲۳

حل: با استفاده از رابطهٔ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

و قرار دادن $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ خواهیم داشت:

$$x_2 = 0/5,\ \ x_3 = 0/6364,\ \ x_4 = 0/6901,\ \ x_5 = 0/6821,$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲۹ـ برای به‌دست آوردن ریشه معادله $x^2 + x - 1 = 0$ در فاصله $(0, 1)$ با استفاده از روش تکرار ساده (روش نقطه ثابت) کدامیک از روابط بازگشتی زیر را می‌توان استفاده کرد؟

۱) $x_n = 1 - x_{n-1}^2$

۲) $x_n = \dfrac{1}{1 + x_{n-1}^2}$

۳) گزینه ۱ و ۲ هر دو صحیحند.

۴) هیچکدام از گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح نیستند.

حل: $g(x)$ گزینه (۱) عبارت است از $g(x) = 1 - x^2$ لذا $g'(x) = -2x^2$ و از آن $|g'(x)| = 2x^2$ که برای $x = 1$ داریم

$$|g'(x)| = 2 > 1$$

بنابراین، این g مناسب نیست. $g(x)$ گزینه (۲) عبارت است از $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ اولاً برای $x \in (0, 1)$ داریم $g(x) \in (0, 1)$ در ثانی:

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

و از آن $|g'(x)| < 1$ در نتیجه این g مناسب است. لذا گزینه (۲) صحیح است.

۳۰ـ شرط کافی برای همگرایی روش نیوتن در به‌دست آوردن ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

۱) $|f''(x)| < |f'(x)|$ ۲) $\left|\dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)}\right| < 1$ ۳) $\left|\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$ ۴) $\left|\dfrac{f'(x)}{f(x)f''(x)}\right| < 1$

حل: تابع $g(x)$ در روش نیوتن عبارت است از

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

برای همگرایی کافی است $|g'(x)| < 1$. اما

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لذا گزینه ۳ صحیح است.

۳۱ـ از روش نیوتن برای به‌دست آوردن ریشه معادله $x^k = N$ استفاده می‌کنیم. در این‌صورت رابطهٔ بازگشتی کدام است؟

۱) $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}}\right]$

۲) $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[kx_n + \frac{N-k}{x_n^{k-1}}\right]$

۳) $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n}\right]$

۴) $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[kx_n + \frac{N}{x_n^{k-1}}\right]$

حل: قرار می‌دهیم

$$f(x) = x^k - N$$

لذا $f'(x) = kx^{k-1}$. رابطه تکراری روش نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - N}{k\, x_n^{k-1}} = \frac{1}{k}\left(kx_n - x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}}\right) = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}}\right]$$

در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۳۲ـ اگر روش نیوتن را دو مرحله برای معادله $x^2 = N$ استفاده کنیم آنگاه $\sqrt{N}$ تقریباً برابر کدام است؟

۱) $\frac{A+B}{2} + \frac{N}{A+B}, N = AB$

۲) $\frac{A+B}{3} + \frac{N}{A+B}, N = AB$

۳) $\frac{A+B}{4} + \frac{N}{A+B}, N = AB$

۴) $A+B + \frac{N}{A+B}, N = AB$

حل: هرگاه در تست ۳۱ قرار دهیم $k = 2$ فرمول تکراری نیوتن برای این مسأله عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

با قرار دادن $x_0 = \frac{A+B}{2}$ داریم:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{2N}{A+B}\right) = \frac{A+B}{4} + \frac{N}{A+B}$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۳۳ـ اگر انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\cos x)\sin^2 x\,dx$ را بخواهیم با روش تقریبی سیمپسون با انتخاب $n = 4$ و تا پنج رقم اعشار حساب کنیم نتیجه چنین خواهد بود؟

۱) ۰٫۴۷۱۸۹ ۲) ۰٫۷۶۹۰۲ ۳) ۰٫۵۱۲۶۸ ۴) ۱٫۳۰۵۵۳

حل: داریم $n=۴$ لذا

$$h=\frac{b-a}{۴}=\frac{\frac{\pi}{۲}-۰}{۴}=\frac{\pi}{۸}$$

بنابراین $x_۴=\frac{\pi}{۲}$، $x_۳=\frac{۳\pi}{۸}$، $x_۲=\frac{\pi}{۴}$، $x_۱=\frac{\pi}{۸}$، $x_۰=۰$ و از آن برای $f(x)=\sin(۲\cos x)\sin^۲ x$ داریم:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sin(۲\cos x)\sin^۲ x\,dx\simeq\frac{h}{۳}(f_۰+۴f_۱+۲f_۲+۴f_۳+f_۴)$$
$$=\frac{\pi}{۲۴}\left\{\sin(۲\cos ۰)\sin^۲ ۰+۴\sin\left(۲\cos\frac{\pi}{۸}\right)\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\right.$$
$$\left.۲\sin\left(۲\cos\frac{\pi}{۴}\right)\sin^۲\frac{\pi}{۴}+۴\sin\left(۲\cos\frac{۳\pi}{۸}\right)\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin\left(۲\cos\frac{\pi}{۲}\right)\sin^۲\frac{\pi}{۲}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{۲۴}\{۰+۰/۵۶۳۴۶۲+۰/۹۸۷۷۶۶+۲/۳۶۵۳۷۳\}=۰/۵۱۲۶۸$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۳۴ـ مقدار انتگرال $I=\int_۰^۱ e^x dx$ با $n=۴$ به روش سیمپسون چقدر می‌باشد؟

۱) ۱/۷۱۸۳۲ ۲) ۱/۵۳۶۲ ۳) ۰/۸۸۲۳ ۴) ۲/۶۴۳۲

حل: داریم $f(x)=e^x$ و $h=\frac{۱-۰}{۴}=\frac{۱}{۴}$ لذا

$$I\simeq S\left(\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۱}{۱۲}(f_۰+۴f_۱+۲f_۲+۴f_۳+f_۴)$$
$$=\frac{۱}{۱۲}(e^۰+۴e^{۰/۲۵}+۲e^{۰/۵}+۴e^{۰/۷۵}+e^۱)=۱/۷۱۸۳۲$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۳۵ـ تعداد مراحل لازم برای محاسبه انتگرال $I=\int_{\pi}^{۲\pi}\cos x\,dx$ با حداکثر خطای $۱۰^{-۴}$ به روش سیمپسون کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

حل: داریم $h=\frac{b-a}{n}=\frac{۲\pi-\pi}{n}=\frac{\pi}{n}$ لذا $|ET(h)|\leq\frac{b-a}{۱۸۰}h^۴M_۴$ که در آن $|f^{(۴)}(x)|\leq M_۴=۱$ زیرا $f^{(۴)}(x)=\sin x$ در نتیجه بایستی

$$\frac{(b-a)}{۱۸۰}\frac{(b-a)^۴}{n^۴}<۱۰^{-۴}\Rightarrow\frac{\pi^۵}{n^۴}<۱۸۰\times۱۰^{-۴}\Rightarrow n^۴>\frac{\pi^۵\times۱۰^{-۴}}{۱۸۰}$$

و از آن $n^۴\geq\left[\sqrt[۴]{\frac{\pi^۵\times۱۰^۴}{۱۸۰}}\right]+۱=۱۲$ لذا گزینه (۳) صحیح است.

۳۶ـ خطای روش ذوزنقه در محاسبهٔ $I = \int_{1}^{1/2} \sqrt{x}dx$ با بازه‌های به طول $h = 0/05$ و $h = 0/1$ چه مقدار است؟

۱) $\begin{cases} 4 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} 2/22 \times 10^{-5} \\ 1/05 \times 10^{-5} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} 4/1 \times 10^{-5} \\ 1/02 \times 10^{-5} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} 4/16 \times 10^{-5} \\ 1/04 \times 10^{-5} \end{cases}$

حل: $|ET(h)| = \frac{b-a}{12}h^2|f''(\alpha)|$ که $\alpha \in (1, 1/2)$ داریم $b - a = 0/2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

بنابراین در فاصله $(1, 1/2)$:

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{4(1)\sqrt{1}} = 0/25$$

و از آن برای $h = 0/05$ خواهیم داشت:

$$|ET(h)| \leq 0/2 \times \frac{1}{12} \times (0/05)^2 \times 0/25 \simeq 1/04 \times 10^{-5}$$

و برای $h = 0/1$ داریم:

$$|ET(h)| \leq 0/2 \times \frac{1}{12} \times (0/1)^2 \times 0/25 \simeq 4/16 \times 10^{-5}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۳۷ـ جدول مقادیر زیر مفروض است:

x	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
f(x)	۱	۱/۱۰۵	۱/۲۲	۱/۳۴۴	۱/۴۸۲

برای $0 \leq x \leq 0/4$ و $|f''(x)| \leq 3$ است. دراین صورت کدام یک از عبارات زیر در مورد انتگرال $I = \int_{0}^{0/4} f(x)dx$ صحیح است؟

۱) $0/490 < I < 0/492$

۲) $0/488 < I < 0/490$

۳) $0/492 < I < 0/494$

۴) $0/466 < I < 0/488$

حل: چون کران $f''(x)$ معلوم است و در فرمول خطای روش ذوزنقه به این کران نیاز داریم لذا از روش ذوزنقه استفاده می‌کنیم؛ با توجه به داده‌های جدول داریم $h = ۰/۱$

$$I \simeq T(h) = ۰/۰۵\{f(۰) + ۲f(۰/۱) + ۲f(۰/۲) + ۲f(۰/۳) + f(۰/۴)\} = ۰/۴۹۱$$

$$|ET(h)| \leq \frac{b-a}{۱۲}h^۲M_۲$$

که در آن $M_۲ = ۳$، $a = ۰$، $b = ۰/۴$ و $h = ۰/۱$ لذا $|ET(h)| \leq ۰/۰۱$ و از آن

$$۰/۴۹۱ - ۰/۰۰۱ \leq I \leq ۰/۴۹۱ + ۰/۰۰۱ \Rightarrow ۰/۴۹۰ \leq I \leq ۰/۴۹۲$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۳۸ـ با استفاده از روش ذوزنقه مقدار انتگرال $I = \int_۰^۱ \sin(x^۲)dx$ با $n = ۱۰$ چقدر می‌باشد؟

۱) $۰/۳۱۱۲$ ۲) $۰/۳۶۵$ ۳) $۰/۶۷۲$ ۴) $۵/۶۹۶۴ \times ۱۰^{-۳}$

حل: برای $n = ۱۰$ داریم $h = \frac{۱}{۱۰}$ لذا

$$T\left(\frac{۱}{۱۰}\right) = \frac{۱}{۲۰}\{f(۰) + ۲f(۰/۱) + ۲f(۰/۲) + \cdots + ۲f(۰/۹) + f(۱)\}$$

که در آن $f(x) = \sin(x^۲)$ بنابراین

$$\begin{aligned} T\left(\frac{۱}{۱۰}\right) &= \frac{۱}{۲۰}\{۰ + ۲(۰/۰۱ + ۰/۰۴۰ + ۰/۰۸۹۹ + ۰/۱۵۹۳ + ۰/۲۴۷۴ \\ &\quad ۰/۳۵۲۳ + ۰/۴۷۰۶ + ۰/۵۹۷۲ + ۰/۷۱۴۳) + ۰/۸۴۱۵\} \\ &= \frac{۱}{۲۰}(۶/۲۲۲۴) = ۰/۳۱۱۲ \end{aligned}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۳۹ـ مقدار انتگرال $I = \int_۰^۱ e^{x^۲}dx$، $n = ۱۰$، $i = ۰, \ldots, ۱۰$ به روش ذوزنقه‌ای چقدر است؟

۱) $۰/۶۵۳۴$ ۲) $۰/۶۷۳۴۸$ ۳) $۱/۳۴۷۳۱$ ۴) هیچکدام

حل: داریم $h = \frac{۱}{۱۰}$ لذا:

$$I \simeq \frac{۱}{۲۰}\{f(۰) + ۲(f(۰/۱) + f(۰/۲) + \cdots + f(۰/۹)) + f(۱)\}$$

که در آن $f(x) = e^{x^۲}$ بنابراین

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{۱}{۲۰}\{۱ + ۲(۱/۰۰۱ + ۱/۰۰۸ + ۱/۰۲۷۴ + ۱/۰۶۶۱ + ۱/۱۳۳۱ + ۱/۲۴۱۱ + \\ &\quad ۱/۴۰۹۶ + ۱/۶۶۸۶ + ۲/۰۷۳۰) + ۲/۷۱۸۳\} \\ &= \frac{۱}{۲۰}(۲۶/۹۷۳۴) = ۱/۳۴۷۳۱ \end{aligned}$$

گزینه (۳) صحیح است.

۴۰ـ چنانچه مقدار تابع f در نقاط x_0 و x_1 به ترتیب برابر f_0 و f_1 باشد مقدار $f(\frac{x_0+x_1}{2})$ با استفاده از درون‌یابی f کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(f_0+f_1)$

۲) $\frac{x_0f_1+x_1f_0}{x_0+x_1}$

۳) $\frac{x_0f_0+x_1f_1}{x_0+x_1}$

۴) تعداد نقاط برای محاسبه کافی نیست.

حل: چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0 و x_1 با استفاده از چندجمله‌ای لاگرانژ عبارت است از:

$$P(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f_1=\frac{(x-x_1)f_0-(x-x_0)f_1}{(x_0-x_1)}$$

حال اگر قرار دهیم $x=\frac{x_0+x_1}{2}$ در این صورت

$$P\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_1\right)f_0-\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_0\right)f_1}{x_0-x_1}$$

$$=\frac{(x_0-x_1)\frac{f_0}{2}+(x_0-x_1)\frac{f_1}{2}}{x_0-x_1}=\frac{1}{2}(f_0+f_1)$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۴۱ـ $N+1$ نقطهٔ متمایز به صورت $x_i=i$ ،$(i=0,1,\ldots,N)$ موجود است چنانچه $L_i(x)$ نشان دهند؛ چند جمله‌ای‌های لاگرانژ باشد حاصل $\sum_{i=0}^{N} iL_i(x)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) x

۳) x^2

۴) $L_N(x)-L_0(x)$

حل: با استفاده از رابطه خطای بخش ۳.۳ فصل سوم داریم:

$$f(x)-P(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

حال اگر قرار دهیم $f(x)=x$ خواهیم داشت:

$$x-\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)=0$$

زیرا $f^{(n+1)}(c)=0$ بنابراین

$$x=\sum_{i=0}^{n} x_iL_i(x)\ \Rightarrow\ x=\sum_{i=0}^{n} iL_i(x)$$

زیرا $x_i = i$ بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۴۲ـ طبق جدول زیر حاصل $f[x_0, x_1] + f[x_1, x_2]$ کدام است؟

i	۰	۱	۲
x_i	۱	۱/۵	۲/۵
$f(x_i)$	۳/۲	۳/۵	۴/۵

۱) ۲/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۳/۸ ۴) ۲

حل:

$$f[x_1, x_2] + f[x_0, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{4/5 - 3/5}{2/5 - 1/5} + \frac{3/5 - 3/2}{1/5 - 1} = 1 + \frac{3}{5} = 1/6$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۴۳ـ چنانچه f یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و g چند جمله‌ای درونیاب در نقاط متمایز $(x_i, f(x_i))$ برای $i = 1, \ldots, N-1$ باشد کدام گزینه درست است؟

۱) $f(x) = g(x)$ ۲) $f(x) < g(x)$

۳) $f(x) > g(x)$ ۴) $g(x)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $N-1$ است

حل: با توجه به اینکه g چندجمله‌ای درونیاب تابع f می‌باشد پس g یک چند جمله‌ای از درجهٔ حداکثر $N-1$ است زیرا تعداد نقاط درونیابی N تاست $(i = 0, \ldots, N-1)$. لذا گزینه (۴) صحیح است.

۴۴ـ تابع جدولی زیر مفروض است. اضافه کردن کدامیک از نقاط زیر به این مجموعه نقاط، تابع درونیاب را تغییر نمی‌دهد؟

x_i	-1	۰	۱
f_i	$+1$	-1	-1

۱) $(0, 0)$ ۲) $(2, 1)$ ۳) $(1, 1)$ ۴) $(1, 2)$

حل: هرگاه با استفاده از روش لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آوریم این چند جمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x) = x^2 - x - 1$$

هر کدام از نقاط داده شده در گزینه‌ها که در چندجمله‌ای فوق صدق کند به این معنی است که اضافه کردن آن نقطه به جدول، چند جمله‌ای درونیاب را تغییر نمی‌دهد. البته دقت کنید که چون نقاط ۰ و ۱ جزء نقاط درونیابی هستند لذا فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد یعنی بدون نیاز به نوشتن $P(x)$ می‌توان گزینه صحیح را مشخص نمود. با امتحان کردن نیز داریم $P(۲) = ۴ - ۲ - ۱ = ۱$.

۴۵ـ چنانچه $f(x) = \tan \frac{\pi x}{۴}$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_۰ = ۰$، $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}(x^۲ + x)$ ۲) $\frac{۱}{۳}(x^۲ + ۲)$ ۳) $\frac{۱}{۳}(-۲x^۲ + ۵x)$ ۴) $\frac{۱}{۳}(x^۲ + x - ۲)$

حل: هرگاه با استفاده از روش لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آوریم، این چند جمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x) = \frac{۱}{۳}(-۲x^۲ + ۵x)$$

دقت کنید که با توجه به تابع f و نقاط x_i داریم $f_۰ = ۰, f_۱ = ۱, f_۲ = -۱$ لذا گزینه ۳ صحیح است.

البته در این موارد توصیه می‌شود که چندجمله‌ای درونیاب را به دست نیاورید بلکه با داشتن x_i ها و f_iها از توابع داده شده در گزینه‌ها استفاده نموده و گزینه صحیح را به دست آورید. مثلاً برای $P(x) = \frac{۱}{۳}(x^۲ + x)$ در گزینه (۱) داریم

$$P(۳) = \frac{۱}{۳}(۱۲) = ۴ \neq -۱ = f_۲$$

لذا گزینه (۱) صحیح نیست، به طور مشابه برای $P(x) = \frac{۱}{۳}(x^۲ + ۲)$ در گزینه (۲) داریم

$$P(۰) = \frac{۱}{۳}(۰ + ۲) = \frac{۲}{۳} \neq ۰ = f_۰$$

لذا گزینه (۲) صحیح نیست و همچنین می‌توان گزینه (۴) را نیز به عنوان گزینه نادرست طرد نمود.

۴۶ـ درجهٔ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط ذیل کدام است؟

x_i	۰	۱	−۱	۲	۳
f_i	۰	−۱	۳	۰	۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن به صورت زیر است:

x_i	f_i				
۰	۰				
		-۱			
۱	-۱				
		-۲		۰	
-۱	۳		۱		۰
		-۱		۰	
۲	۰		۱		
		۳			
۳	۲				

چون تفاضلات مرتبه سوم به بعد صفر هستند، لذا چند جمله‌ای درونیاب از مرتبه ۲ است یعنی گزینه (۱) صحیح است.

۴۷ـ برای حل معادله $x^۲ + x - ۱ = ۰$ در فاصله $(۰, ۱)$ به روش تکرار ساده کدام انتخاب برای $g(x)$ همگرایی بهتری دارد؟

۱) $g_۱(x) = \dfrac{x^۲ + ۱}{۲x + ۱}$ ۲) $g_۲(x) = \dfrac{۱}{۱ + x}$ ۳) $g_۳(x) = \sqrt{۱ - x}$ ۴) $g_۴(x) = ۱ - x^۲$

حل: $g(x)$ مناسب بایستی دو شرط داشته باشد

۱) $g : [a, b] \to [a, b]$ ۲) $|g'(x)| < ۱$

مثلاً برای $g_۴(x)$ شرط برقرار نیست زیرا $g_۴'(x) = -۲x$ به طور مشابه چون $g_۳'(x) = \dfrac{-۱}{۲\sqrt{۱ - x}}$ لذا وقتی $x \to ۱$ تابع $g_۳'$ می‌تواند بی‌کران زیاد شود اما برای $g_۲(x)$ اولاً داریم

$$۰ < x < ۱ \Rightarrow ۱ < ۱ + x < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۱ + x} < ۱$$

یعنی $g_۲(x) \in (\frac{۱}{۲}, ۱) \subseteq (۰, ۱)$ در ثانی $g_۲'(x) = \dfrac{۱}{(۱ + x)^۲}$ و از آن برای هر $x \in (۰, ۱)$ خواهیم داشت $|g_۲'(x)| = \dfrac{۱}{(۱ + x)^۲} < ۱$ لذا $g_۲$ مناسب است یعنی گزینه (۲) صحیح است.

۴۸ـ برای پیدا کردن ریشه سوم $a > ۰$ با استفاده از روش تکرار $x_{n+۱} = \dfrac{a}{x_n^۲}$، با فرض انتخاب $x_۰$ مناسب، حاصل $\lim_{n \to \infty} \left| \dfrac{x_{n+۱} - \alpha}{x_n - \alpha} \right|$ چیست؟ (α ریشه سوم a می‌باشد.)

۱) $\alpha^۲$ ۲) $۲\alpha^۲$ ۳) α ۴) ۲

حل: قبل از حل مسأله ابتدا توضیحی در ارتباط با مرتبهٔ همگرایی دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ به α را بیان می‌نماییم:

تعریف مرتبه همگرایی یک دنباله

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ به عدد α همگراست، یعنی $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. هرگاه اعداد مثبت c و p موجود باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right| = c\,, \qquad (c \neq 0)$$

در این صورت می‌گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای همگرایی مرتبه p است. هرگاه $p = 1$، همگرایی را خطی می‌نامیم. مرتبه همگرایی یک دنباله معیاری است برای تعیین آهنگ همگرایی دنباله، که با استفاده از آن می‌توان دنباله‌های مختلف را از نظر سرعت همگرایی با هم مقایسه کرد. به این معنی که هر چه مرتبه همگرایی بالاتر باشد، سرعت میل کردن جملات دنباله به حد آن یعنی α بیشتر است.

مرتبه همگرایی روش تکرار ساده

در تمام قسمتهای بعد فرض بر این است که α حد دنباله $\{x_n\}$ است.

قضیه: هرگاه $x = g(x)$ به منظور حل معادله $f(x) = 0$ در روش تکرار ساده مورد استفاده قرار گرفته باشد، در این صورت اگر $g'(\alpha) \neq 0$ مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ یک است.

اثبات ـ چون α ریشه معادله است، لذا $\alpha = g(\alpha)$، همچنین $x_{n+1} = g(x_n)$. هرگاه بسط تیلور تابع g را حول α بنویسیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$g(x_n) = g(\alpha) + (x_n-\alpha)g'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}g''(\eta_n) \qquad (1)$$

که η_n عددی بین α و x_n است. از $\alpha = g(x)$ و $g(x_n) = x_{n+1}$ داریم:

$$x_{n+1} = \alpha + (x_n-\alpha)g'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}g''(\eta_n) \qquad (2)$$

اگر $g'(\alpha) \neq 0$ لذا عبارت $(x_n-\alpha)g'(\alpha)$ در سمت راست وجود دارد و از آن از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = g'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)}{2!}g''(\eta_n) \qquad (3)$$

حال هرگاه $n\to\infty$، چون $(x_n-\alpha)\to 0$ لذا از (۳) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = |g'(\alpha)| \neq 0$$

در نتیجه بنا به تعریف مرتبه همگرایی داریم $p = 1$ و از آن اگر $g'(\alpha) \neq 0$ مرتبه همگرایی روش تکرار ساده یک است.

سؤال. هرگاه در روش تکرار ساده داشته باشیم $g'(\alpha) = 0$، همگرایی روش چند است؟

هرگاه $g'(\alpha) = 0$ عبارت $(x_n - \alpha)g'(\alpha)$ در سمت راست رابطه (۱) وجود ندارد، در این صورت از رابطه (۲) داریم:

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} g''(\eta_n) \qquad (۴)$$

با تقسیم طرفین رابطه (۴) بر $(x_n - \alpha)^2$ خواهیم داشت:

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{g''(\eta_n)}{2}$$

و از آن

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = \left| \frac{g''(\alpha)}{2} \right| \qquad (۵)$$

زیرا η_n بین x_n و α است مثلاً $x_n < \eta_n < \alpha$ (یا $\alpha < \eta_n < x_n$) حال برای $x_n \to \alpha$ لذا بنابه قضیه ساندویچ $\eta_n \to \alpha$. و از آن با فرض پیوستگی g'' رابطه (۵) برقرار است. حال اگر $g''(\alpha) \neq 0$ در این صورت بنابه رابطه (۵) مرتبه همگرایی $\{x_n\}$ دو است.

نکته: هرگاه در روش تکرار ساده $g'(\alpha) = 0$ و ندانیم $g''(\alpha)$ صفر است یا مخالف صفر می‌گوییم مرتبه همگرایی روش تکرار ساده حداقل دو است. به طور مشابه هرگاه $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ در این صورت مرتبه همگرایی روش تکرار ساده حداقل سه است.

در حالت کلی هرگاه $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$ و $g^{(k)}(\alpha) \neq 0$ در این صورت مرتبه همگرایی روش تکرار ساده (دقیقاً) k است.

مرتبه همگرایی روش نیوتن

هرگاه α ریشه ساده معادله $f(x) = 0$ باشد یعنی $f'(\alpha) \neq 0$ در این صورت مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل دو است.

اثبات: در روش نیوتن داریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

هرگاه قرار دهیم:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

در این صورت:

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

حال اگر $f'(\alpha) \neq ۰$ چون $f(\alpha) = ۰$ (ناصفر بودن $f'(\alpha)$ حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ را بیجاد نمی‌کند) در این صورت $g'(\alpha) = ۰$. در نتیجه بنا به نکته بیان شده مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل ۲ است، زیرا $g'(\alpha) = ۰$ و در مورد $g''(\alpha)$ اطلاعی نداریم.

سوال. اگر $f'(\alpha) = ۰$ یعنی α ریشه تکراری معادله $f(x) = ۰$ باشد مرتبه همگرایی روش نیوتن چند است؟

هرگاه $f'(\alpha) = ۰$ در این صورت α ریشه تکراری با مرتبه تکرار حداقل دو است، در این صورت تابع $f(x)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$$

که در آن $h(\alpha) \neq ۰$. نشان می‌دهیم اگر $m > ۱$ مرتبه همگرایی روش نیوتن یک است داریم:

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-۱}h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)$$

$$f'(x) = (x-\alpha)^{m-۱}[mh(x) + (x-\alpha)h'(x)]$$

با قرار دادن $f(x)$ و $f'(x)$ در فرمول نیوتن یعنی $x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ داریم:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{(x_n-\alpha)h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n-\alpha)h'(x_n)}$$

با کم کردن α از طرفین رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$x_{n+۱} - \alpha = (x_n - \alpha)\left\{۱ - \frac{h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n-\alpha)h'(x_n)}\right\}$$

و از آن:

$$\frac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha} = ۱ - \frac{h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n-\alpha)h'(x_n)}$$

حال برای $n \to \infty$ چون $x_n \to \alpha$ و با فرض پیوستگی h نیز $h(x_n) \to h(\alpha)$ لذا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = ۱ - \frac{۱}{m} = \frac{m-۱}{m} \neq ۰, \quad (m \neq ۱)$$

حال اگر تعریف مرتبه همگرایی را درنظر بگیرید، رابطه اخیر نشان می‌دهد که اگر $m > ۱$ مرتبه همگرایی روش نیوتن یک است.

نکته. می‌توان نشان داد (نشان دهید؟) مرتبه همگرایی روش وتری برابر است با

$$p = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \simeq ۱/۶۱۸$$

این مطلب نشان می‌دهد که مرتبه همگرایی الزاماً عددی صحیح نیست.

حال با توجه به مطالب بیان شده مساله ۴۸ را حل می‌نماییم.

با توجه به رابطه (۳) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+۱}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = |g'(x)|$$

که در آن $g(x)=\frac{a}{x^{۲}}$ لذا

$$g'(x)=\frac{-۲a}{x^{۳}} \Rightarrow g'(\alpha)=\frac{-۲a}{\alpha^{۳}}$$

و چون $a=\alpha^{۲}$ لذا $|g'(\alpha)|=۲$ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۴۹ـ برای پیدا کردن ریشه دوم عدد ۶ به روش نابجایی و با بازهٔ اولیه (۲,۳) در تکرار اول چه جوابی به دست می‌آید؟

۱) ۲٫۸ ۲) ۲٫۶ ۳) ۲٫۶۴ ۴) ۲٫۴

حل: هرگاه قرار دهیم $f(x)=x^{۲}-۶$ با توجه به اینکه در روش نابجایی داریم $x_n=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

با $a=۲$ و $b=۳$ داریم $x_۱=\frac{۲\times۳-۳\times(-۲)}{۳-(-۲)}=\frac{۱۲}{۵}=۲٫۴$ لذا گزینه (۴) صحیح است.

۵۰ـ چنانچه $f''(x)\approx\frac{f(x_۰+h)-۲f(x_۰)+f(x_۰-h)}{h^{۲}}$ خطای برشی این فرمول متناسب با چه توانی از h خواهد بود؟

۱) صفر ۲) اول ۳) دوم ۴) سوم

حل: با توجه به بسط تیلور داریم:

$$f(x_{i+۱})=f(x_i+h)=f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^{۲}}{۲!}f''(x_i)+\frac{h^{۳}}{۳!}f'''(x_i)+\frac{h^{۴}}{۴!}f^{(۴)}(x_i)+\dots$$
$$f(x_{i-۱})=f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^{۲}}{۲!}f''(x_i)-\frac{h^{۳}}{۳!}f'''(x_i)+\frac{h^{۴}}{۴!}f^{(۴)}(x_i)+\dots$$

با جمع نمودن دو رابطه فوق خواهیم داشت:

$$f(x_{i+۱})+f(x_{i-۱})=۲f(x_i)+h^{۲}f''(x_i)+\frac{h^{۴}}{۱۲}f^{(۴)}(x_i)+\dots$$

لذا

$$\frac{f(x_{i+۱})-۲f(x_i)+f(x_{i-۱})}{h^{۲}}=f''(x_i)+\frac{h^{۲}}{۱۲}f^{(۴)}(x_i)+\dots$$

در نتیجه با توجه به عبارت $\frac{h^{۲}}{۱۲}$ در سمت راست، تقریب خطای $f''(x_i)$ با مقدار سمت چپ عبارت فوق از مرتبه $h^{۲}$ است، یعنی گزینه (۳) صحیح است.

۵۱ـ کدام فرمول برای محاسبه $f'(x_0)$ مناسب‌تر است؟

۱) $\dfrac{3f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{2h}$ ۲) $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^2}$

۳) $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h^2}$ ۴) $\dfrac{3f(x_0) - 4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{2h}$

حل: گزینه‌های (۱) و (۳) به مقادیری از f نیاز دارند که موجود نیستند این مقادیر $f(x_0 - h)$ و $f(x_0 - 2h)$ هستند. همچنین با توجه به رابطه (۲۴) فصل چهارم خطای فرمول گزینه (۲) از $O(h)$ است در حالی که هرگاه مرتبه خطا را برای فرمول گزینه (۴) به‌دست آوریم این خطا از مرتبه $o(h^2)$ است، لذا گزینه (۴) مناسب‌تر است. برای به دست آوردن مرتبه خطای فرمول گزینه (۴) با استفاده از روش بسط تیلور داریم:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \dots \qquad (a)$$

همچنین

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 4h^2f''(x_0) + \frac{8h^3}{6}f'''(x_0) + \dots \qquad (b)$$

هرگاه رابطه (a) را در ۴− ضرب نموده و نتیجه را با رابطه (b) جمع کنیم خواهیم داشت.

$$-4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) = -3f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{2h^3}{3}f'''(x_0) + \dots$$

بنابراین

$$f'(x_0) - \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{2h} = -\frac{h^2}{3}f'''(x_0) \pm \dots$$

بنابراین خطا $O(h^2)$ است.

۵۲ـ خطای فرمول $f'(x) \approx \dfrac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$ کدام است؟

۱) $O(1)$ ۲) $O(h)$ ۳) $O(h^2)$ ۴) $O(h^3)$

حل: مشابه دو مساله قبل با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \dots \qquad (a)$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) \pm \dots \qquad (b)$$

هرگاه رابطه (b) را منفی یک ضرب نموده و حاصل را با رابطه (a) جمع کنیم خواهیم داشت:

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f''(x) \pm \dots$$

لذا

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = -\frac{h^2}{6}f'''(x) \pm \dots$$

در نتیجه خطا $O(h^2)$ است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۵۳ـ با توجه به داده‌های جدول زیر تقریبی از $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ به روش ذوزنقه‌ای کدام است؟

x_i	-1	$-0/6$	$-0/2$	$0/2$	$0/6$	1
f_i	0	$0/1$	$0/15$	$0/05$	$0/15$	$0/3$

۱) ۰/۱۷۵ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۱۲ ۴) ۰/۲۴

حل: با توجه به داده‌های جدول قرار می‌دهیم $h = 0/4$ لذا

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\{f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + f_5\}$$

که در آن $f_i = f(x_i)$ لذا

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{0/4}{2}\{0 + 2(0/1 + 0/15 + 0/05 + 0/15) + 0/3\} = 0/2(1/2) = 0/24$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۵۴ـ کدام گزینه غلط است؟

۱) قاعده نقطه میانی برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه اول دقیق است.

۲) قاعده ذوزنقه‌ای برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه دوم دقیق است.

۳) قاعده سیمپسون برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه سوم دقیق است.

۴) قاعده دو نقطه‌ای گاوس برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه سوم دقیق است.

حل: در حالت کلی برای تخمین انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ به روشهای ذکر شده خطا را به صورتهای زیر داریم:

الف) خطای روش نقطه میانی با استفاده از رابطه (۵۰) فصل چهارم عبارت است از $\frac{(b-a)}{24}h^2f''(\eta)$

بنابراین این روش برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجه اول دقیق است. زیرا برای این چند جمله‌ایها داریم $f''(x) = 0$

ب) خطای قاعده ذوزنقه‌ای با استفاده از رابطه (۴۶) فصل چهارم عبارت است از $-\frac{(b-a)}{12}h^2f''(\beta)$

لذا این روش نیز برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجه اول دقیق است.

پ) با توجه به رابطه (۴۸) فصل چهارم خطای قاعده سیمپسون عبارت است از

$$-\frac{(b-a)}{180}h^4f^{(4)}(\eta)$$

در نتیجه این روش برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجه سوم دقیق است زیرا برای این چند جمله‌ایها داریم $f^{(4)}(x) = 0$.

ت) در حالت کلی اثبات می‌شود قاعده گاوس n نقطه‌ای برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجهٔ $2n - 1$ دقیق است.

لذا با توجه به موارد فوق گزاره بیان شده در گزینه (۲) نادرست است.

۵۵- برای محاسبه $\int_{-1}^{0} e^x dx$ به روش سیمپسون و با خطای کمتر از 45×10^{-6} حداقل تعداد زیر فاصله‌ها چه میزان باید باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

حل: با استفاده از رابطه (۴۸) فصل چهارم خطای قاعده سیمپسون عبارت است از:

$$ES(h) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

لذا $|ES(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(\eta)|$ اما چون $f(x) = e^x$ لذا $f^{(4)}(x) = e^x$ بنابراین

$$e^{-1} - 1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \leq e^x \leq e^0 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq f^{(4)}(x) \leq 1$$

در نتیجه $|f^{(4)}(x)| \leq 1$ بنابراین هرگاه بخواهیم خطای روش سیمپسون کمتر از 45×10^{-6} باشد کافی است داشته باشیم $\frac{b-a}{180} h^4 < 45 \times 10^{-6}$ چون $b = 0$ و $a = -1$ لذا بایستی $\frac{1}{180} h^4 < 45 \times 10^{-6}$ و یا $h^4 < 81 \times 10^{-4}$ در نتیجه باید $h < 3 \times 10^{-1}$ و یا $h < 0/3$ و چون $\frac{b-a}{h} = n$ لذا

$$n > \frac{0+1}{0/3} = \frac{10}{3} \simeq 3/3$$

بنابراین هرگاه $n = 4$ محاسبه انتگرال با دقت موردنظر امکان‌پذیر است. یعنی گزینه (۳) صحیح است.

۵۶- برای محاسبه $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ از روش ذوزنقه‌ای به ازای $h = \frac{\pi}{2}$ و $h = \frac{\pi}{4}$ استفاده کرده‌ایم، پس از اعمال روش رامبرگ بر روی دو مقدار به‌دست آمده فوق کدام مقدار برای انتگرال به‌دست می‌آید؟

۱) $\frac{2\sqrt{2}+1}{12}\pi$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}+5}{6}\pi$ ۳) $\frac{5-\sqrt{2}}{6}\pi$ ۴) $\frac{5+\sqrt{2}}{6}\pi$

قبل از حل مساله ابتدا روش رامبرگ را برای تعیین تقریب $\int_a^b f(x)dx$ توضیح می‌دهیم. با استفاده از روش رامبرگ می‌توان به کمک مقادیر تقریبی که از روش ذوزنقه برای $\int_a^b f(x)dx$ به دست می‌آید و بدون محاسبهٔ تابع f در نقاط جدید می‌توان تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)dx$ حساب نمود. اساس این روش بر این مطلب است که هرگاه $T(h)$ تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش ذوزنقه باشد می‌توان نشان داد که:

$$I = \int_a^b f(x)dx = T(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots \qquad (1)$$

که در آن a_i ها مستقل از h بوده و با مشتق مرتبه i تابع f متناسب هستند هرگاه در رابطه (۱)، به جای h قرار دهیم $\frac{h}{2}$ در این صورت:

$$I = \int_a^b f(x)dx = T\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h^2}{4}\right) + a_4\left(\frac{h^4}{16}\right) + \dots \qquad (2)$$

برای حذف a_2 از معادلات (۱) و (۲) معادله (۱) را از چهار برابر معادلهٔ (۲) کم می‌کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$4I - I = 4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) - \frac{3a^4h^4}{4} + \dots$$

$$I = \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} - \frac{a^4h^4}{4} + \dots \qquad (3)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که مقدار $\frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3}$ تقریبی از I است که خطای آن متناسب با h^4 است (یادآوری می‌شود که خطای قاعده ذوزنقه متناسب با h^2 است.) برای تفهیم مطلب به مثال زیر توجه نمایید:

مثال: تقریبهایی از $I = \int_0^1 x^3 dx$ را با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای و با $h = 1$ و $h = \frac{1}{2}$ به دست آورده سپس با استفاده از قاعده رامبرگ تقریب بهتری برای انتگرال به دست آورید.

حل: $T(1) = \frac{1}{2}, T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}$ لذا با استفاده از قاعده رامبرگ خواهیم داشت:

$$I = \frac{4T(\frac{1}{2}) - T(1)}{3} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{4}$$

توجه داشته باشید که $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ یعنی قاعده رامبرگ انتگرال چند جمله‌ای تا درجه ۳ را به طور دقیق محاسبه می‌کند. و این را می‌توان ادامه نیز داد.

حال مسأله ۵۶ را حل می‌نماییم. یعنی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را ابتدا با $T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $T\left(\frac{\pi}{4}\right)$ تقریب می‌زنیم، سپس مقدار انتگرال را با استفاده از قاعده رامبرگ به دست می‌آوریم. داریم:

$$T(h) = \frac{h}{2}\{f_0 + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + f_n\}$$

لذا برای $h = \frac{\pi}{2}$ داریم $n = 1$ و از آن

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

و برای $h = \frac{\pi}{4}$ داریم $n = 2$ و از آن

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}(1 + \sqrt{2})$$

در نتیجه با استفاده از قاعده رامبرگ داریم:

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x dx \simeq \frac{۴T(\frac{\pi}{۴}) - T(\frac{\pi}{۲})}{۳} = \frac{\frac{\pi}{۲}(۱ + \sqrt{۲}) - \frac{\pi}{۴}}{۳} = \pi\frac{۲ + ۲\sqrt{۲} - ۱}{۱۲} = \frac{۱ + ۲\sqrt{۲}}{۱۲}\pi$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۵۷ـ تابع f با جدول مقادیر زیر داده شده است:

x_i	۱	۲	۳
f_i	۱	۱/۶	۱/۹

همچنین می‌دانیم در فاصله $[۱,۳]$، $|f^{(۴)}(x)| \le ۰/۹$ کدام عبارت در مورد $I = \int_۱^۳ f(x)dx$ دقیق‌تر است؟

۱) $۳/۰۵ \le I \le ۳/۲$ ۲) $۳/۰۹ \le I \le ۳/۱۱$ ۳) $۳ \le I \le ۳/۲$ ۴) $۳/۰۱ \le I \le ۳/۱۲$

حل: چون تعداد نقاط سه تاست لذا می‌توانیم از روش سیمپسون استفاده کنیم که در آن $h = ۱$

$$I \simeq S(h) = \frac{h}{۳}(f_۰ + ۴f_۱ + f_۲)$$

$$S(۱) = \frac{۱}{۳}(۱ + ۴(۱/۶) + ۱/۹) = ۳/۱$$

با استفاده از رابطه (۴۹) فصل چهارم خطای قاعده سیمپسون به صورت زیر است:

$$|ES(h)| \le \frac{b-a}{۱۸۰}h^۴|f^{(۴)}(\eta)|$$

که در آن $|f^{(۴)}(\eta)| \le ۰/۹$ و $b - a = ۲h$ زیرا $n = ۲$ و $h = \frac{b-a}{۲}$ بنابراین

$$|ES(h)| \le \frac{۱}{۹۰}h^۵ \times ۰/۹ = ۱۰^{-۲}$$

زیرا $h = ۱$ لذا $۳/۱ - ۱۰^{-۲} \le I \le ۳/۱ + ۱۰^{-۲}$ و یا $۳/۰۹ \le I \le ۳/۱۱$ پس گزینه (۲) صحیح است.

۵۸ـ برای اینکه $\int_a^b f(x)dx \approx w_۱f(x_۱)$ حداکثر دقت را داشته باشد مقادیر مناسب برای $w_۱$ و $x_۱$ باید چگونه باشند؟

۱) $\begin{cases} x_۱ = \frac{b-a}{۲} \\ w_۱ = b + a \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x_۱ = \frac{b+a}{۲} \\ w_۱ = b - a \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x_۱ = \frac{b+a}{۲} \\ w_۱ = \frac{b-a}{۲} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x_۱ = b \\ w_۱ = \frac{b-a}{۲} \end{cases}$

حل: برای اینکه فرمول انتگرالگیری $\int_a^b f(x)dx \simeq w_1 f(x_1)$ که دارای دو مجهول w_1 و x_1 است حداکثر دقت را داشته باشد بایستی قاعده برای $f(x) = 1$ و $f(x) = x$ دقیق باشد.

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b xdx = b - a = w_1 \qquad (1)$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2} = w_1 f(x_1) = w_1 x_1 \qquad (2)$$

از (۱) چون $w_1 = b - a$ لذا رابطه (۲) عبارت است از:

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = (b - a)x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b + a}{2}$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۵۹ـ برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ از روش ذوزنقه استفاده شده و خطای کمتر از ۰/۰۴ حاصل شده است برای اینکه میزان خطا به کمتر از ۰/۰۱ کاهش یابد

۱) تعداد نقاط را ۲ برابر نماییم.
۲) تعداد نقاط را ۴ برابر نماییم.
۳) تعداد نقاط را ۸ برابر نماییم.
۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

حل: چون خطای قاعده ذوزنقه‌ای متناسب با h^2است لذا هرگاه h را نصف کنیم خطا $\frac{1}{4}$ می‌شود بنابراین در این مسئله هرگاه h را نصف نماییم خطا $\frac{1}{4}$ مقدار قبلی، ۰/۰۴، خواهد بود، بنابراین برای رسیدن به خطای ۰/۰۱ بایستی h را نصف کنیم و یا به طور معادل بایستی تعداد نقاط را ۲ برابر نماییم در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۶۰ـ تابع f با شرایط $f(-1) = 1$، $f(0) = 2$ و $f(2) = 1$ داده شده است. چنانچه مشتق سوم f در بازهٔ $[-1, 2]$ کمتر از ۱/۳۵ باشد حداکثر خطای محاسبهٔ $f(1)$ کدام است؟

۱) ۰/۳۷　　۲) ۰/۲۱　　۳) ۰/۱۲　　۴) ۰/۴۵

حل: خطای چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر است:

$$|f(x) - P(x)| = |(x + 1)(x - 0)(x - 2)|\frac{|f^{(3)}(z)|}{3!}$$

که z عددی در فاصله $[-1, 2]$ است. بنابراین برای $x = 1$ داریم:

$$|f(1) - P(1)| = |(1 + 1)(1)(1 - 2)|\frac{|f^{(3)}(z)|}{6} \leq \frac{1}{3} \times 1/35 = 0/45$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۶۱ـ تابع f به صورت جدول زیر داده شده است. با فرض اینکه در فاصله $0 \leq t \leq 3$ داشته باشیم $|f^{(4)}(t)| \leq 0/8$ یک کران بالای مناسب برای خطای حاصل ~~از تخمین~~ $f(1/5)$ از روی جدول کدام است؟

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۱	۰	۰	۱-

۱) ۰/۰۱۲۱۶   ۲) ۰/۰۱۸۷۵   ۳) ۰/۰۲۴۵۱   ۴) ۰/۰۲۷۸۳

حل: فرمول خطای چند جمله‌ای درونیاب در این مساله عبارت است از:

$$|f(x) - P(x)| = |(x - ۰)(x - ۱)(x - ۲)(x - ۳)|\frac{|f^{(۴)}(z)|}{۴!}$$

که z عددی در فاصله [۰, ۳] است. برای $x = ۱/۵$ خواهیم داشت:

$$|f(۱/۵) - P(۱/۵)| = |۱/۵(۰/۵)(-۰/۵)(-۱/۵)|\frac{|f^{(۴)}(z)|}{۲۴}$$
$$\leq \frac{۰/۵۶۲۵}{۲۴} \times ۰/۸ = ۰/۰۱۸۷۵$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

قسمت دوم (آزمون‌های کارشناسی ارشد)

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۶

۱ـ روشهای مختلف پیدا کردن ریشه معادلات برای تابع $f(x) = ۰$ را درنظر بگیرید، با توجه به تعریف سرعت همگرایی کدام یک از ترتیبهای ذیل صحیح است (از سرعت کم به سرعت زیاد)؟

۱) a) نصف کردن فاصله b) تکرار ساده c) نیوتن d) وتری

۲) a) نیوتن b) نصف کردن فاصله c) وتری d) تکرار ساده

۳) a) نصف کردن فاصله b) وتری c) تکرار ساده d) نیوتن

۴) a) نصف کردن فاصله b) تکرار ساده c) وتری d) نیوتن

حل: از میان روشهای بیان شده روش دو بخشی (نصف‌کردن فاصله) از همه کندتر است، مرتبه همگرایی روش تکرار ساده، معمولاً یک است (تحت شرایطی می‌تواند بیشتر از یک نیز باشد)، روش همگرایی روش وتری $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \simeq ۱/۶۱۸$ است و روش نیوتن دارای مرتبه همگرایی ۲ است هرگاه ریشه موردنظر ساده باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. (برای تعریف مرتبه همگرایی لطفاً به مساله ۴۸ قسمت اول مراجعه نمایید)

۲ـ اگر دستگاه معادلات
$$\begin{cases} ۸x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳ = ۳۰ \\ x_۱ - ۹x_۲ + ۲x_۳ = ۱ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ + ۶x_۳ = ۳۱ \end{cases}$$
را با شروع از نقطه (۱, ۱, ۱) و با روش گاوس ـ سایدل حل کنیم، پس از دو تکرار جواب حاصل برای $x_۱$ برابر کدام است؟

۱) ۳/۸۹۵۹ ۲) ۰/۴۵۸۳ ۳) ۲/۱۷۴۵ ۴) ۱/۴۷۵۴

حل: طرح تکراری روش گاوس ـ سایدل به صورت زیر است:

$$x_۱^{(k+۱)} = \frac{۱}{۸}(۳۰ - ۲x_۲^{(k)} - ۳x_۳^{(k)})$$
$$x_۲^{(k+۱)} = -\frac{۱}{۹}(۱ - x_۱^{(k+۱)} - ۲x_۳^{(k)})$$
$$x_۳^{(k+۱)} = \frac{۱}{۶}(۳۱ - ۲x_۱^{(k+۱)} - ۳x_۲^{(k+۱)})$$

با قرار دادن $x_۱^{(۰)} = x_۲^{(۰)} = x_۳^{(۰)} = ۱$ داریم:

$$x_۱^{(۱)} = \frac{۱}{۸}(۳۰ - ۲ - ۳) = ۳/۱۲۵$$
$$x_۲^{(۱)} = -\frac{۱}{۹}(۱ - ۳/۱۲۵ - ۲) = ۰/۴۵۸۳$$
$$x_۳^{(۱)} = \frac{۱}{۶}(۳۱ - ۲(۳/۱۲۵) - ۳(۰/۴۵۸۳)) = ۳/۸۹۵۹$$

در نتیجه:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}(30 - 2(0/4583) - 3(3/8959)) = 2/1745$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۳ـ مشتق دوم تابع $f(x)$ که به وسیله ۳ نقطه $(x_1 - h, y_1 + 4)$، $(x_1, y_2 + 8)$ و $(x_1 + h, y_3 + 16)$ نشان داده شده است برابر است با:

۱) $f''(x_1) = \dfrac{(y_1 + 2) - 2y_2 + (y_3 + 2)}{h^2}$

۲) $f''(x_1) = \dfrac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2}$

۳) $f''(x_1) = \dfrac{(y_1 + 1) - 2(y_2 + 2) + (y_3 + 3)}{h^2}$

۴) $f''(x_1) = \dfrac{(y_1 + 4) + 2(y_2 + 8) + (y_3 + 16)}{h^2}$

حل: با توجه به رابطه (۲۰) فصل چهارم $f''(x_i)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2}$$

برای $i = 1$ و مقادیر داده شده در مساله داریم:

$$f''(x_1) = \frac{y_1 + 4 - 2(y_2 + 8) + y_3 + 16}{h^2} = \frac{y_1 + 4 - 2y_2 + y_3}{h^2}$$
$$= \frac{(y_1 + 2) - 2y_2 + (y_3 + 2)}{h^2}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۴ـ مقادیر زیر از تابع $f(t)$ استخراج گردیده است.

t_i	۰	۱	۲	۳	۴
$f(t_i)$	۵	۸	۱۷	۴۴	۱۰۱

۱) ۸/۳۴۲ ۲) ۸/۴۳۲ ۳) ۹/۴۳۲ ۴) ۹/۳۴۴

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

t_i	$f(t_i)$				
۰	۵				
		۳			
۱	۸		۳		
		۹		۲	
۲	۱۷		۹		۰
		۲۷		۲	
۳	۴۴		۱۵		
		۵۷			
۴	۱۰۱				

بنابراین چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از:

$$P(t) = ۵ + ۳t + ۳t(t-۱) + ۲t(t-۱)(t-۲)$$

بنابراین

$$f(۱/۱) \simeq P(۱/۱) = ۵ + ۳(۱/۱) + ۳(۱/۱)(۰/۱) + ۲(۱/۱)(۰/۱)(-۰/۹) = ۸/۴۳۲$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۵ـ اگر داده‌های

x_k	-۱	۰	۱	۲
y_k	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۲۵

را برای بررسی منحنی $y = \frac{۱}{Ax+B}$ به کار ببریم در این صورت (A, B) برابر خواهد بود با:

۱) (۱ و ۲/۱) ۲) (۱ و ۲/۱) ۳) (۳/۲ و ۱/۱) ۴) (۱/۱ و ۲/۲)

حل: با توجه به رابطه (۱۸) فصل هشتم کتاب، معادلات نرمال برای تعیین A و B عبارتند از:

$$\begin{cases} mB + A\sum x_i = \sum \frac{۱}{y_i} \\ B\sum x_i + A\sum x_i^۲ = \sum \frac{x_i}{y_i} \end{cases}$$

با $m = ۴$. داریم

$$\begin{cases} ۴B + A(-۱+۰+۱+۲) = \left(\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۰/۵} + \frac{۱}{۰/۲۵} + \frac{۱}{۰/۲۵}\right) \\ B(-۱+۰+۱+۲) + A(۱+۰+۱+۴) = \left(-۱ + ۰ + \frac{۱}{۰/۲۵} + \frac{۲}{۰/۲۵}\right) \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} ۴B + ۲A = ۱۱ \\ ۲B + ۶A = ۱۱ \end{cases}$$

از حل دستگاه خواهیم داشت $A = ۱/۱$ و $B = ۲/۲$ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۷

۱ـ معادله $f(x) = x^۶ + ۴x^۲ - ۱۱$ در فاصلهٔ $[۱, ۲]$ مفروض است. حدوداً چند تکرار لازم است که با استفاده از روش نصف کردن یکی از ریشه‌های معادلهٔ فوق در فاصلهٔ تعیین شده با دقت $۱۰^{-۷}$ محاسبه گردد.

۱) ۲۳ تکرار ۲) ۱۷ تکرار ۳) ۲۶ تکرار ۴) ۲۰ تکرار

حل: کران بالای خطای در تکرار n ام تعیین ریشه در روش نصف کردن فاصله عبارت است از

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{۲^n}$$

که در آن α ریشه مورد نظر از معادله در فاصله $[a, b]$ است. برای داشتن دقت $۱۰^{-۷}$ بایستی

$$\frac{b-a}{۲^n} < ۱۰^{-۷}$$

که در آن $b = ۲$ و $a = ۱$ لذا

$$\frac{۱}{۲^n} < ۱۰^{-۷} \Rightarrow ۲^n > ۱۰^۷ \Rightarrow n > ۷\log_۲^{۱۰} = ۷ \times \frac{\log_{۱۰}^{۱۰}}{\log_{۱۰}^{۲}} \Rightarrow n > \frac{۷}{۰/۳۰۱} = ۲۳/۲۵$$

بنابراین برای $n \geq ۲۴$ دقت مورد نظر را خواهیم داشت، با توجه به گزینه‌های داده شده گزینه (۳) صحیح است.

۲ـ با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات خم برازنده یا پوشا، به شکل $y = ce^{Ax}$ را برای تابع جدولی ذیل به دست آورید.

۱) $y = -۱/۵۷۸e^{-۰/۴۹۴x}$ ۲) $y = ۱/۵۷۸e^{-۰/۳۹۱x}$

۳) $y = -۱/۵۷۸e^{۰/۳۹۱x}$ ۴) $y = ۱/۵۷۸e^{۰/۳۹۱x}$

x	۰/۰	۱/۰	۲/۰	۳/۰	۴/۰
y	۱/۵	۲/۵	۳/۵	۵/۰	۷/۵

حل: از $y = ce^{Ax}$ خواهیم داشت $\ln y = \ln c + Ax$

هرگاه قرار دهیم $B = \ln c$ و $Z = \ln y$ به رابطه (۱۵) فصل هشتم کتاب می‌رسیم که : $Z = B + Ax$
با توجه به رابطه (۱۶) فصل هشتم کتاب، معادلات نرمال برای تعیین A و B عبارتند از:

$$\begin{cases} mB + A\sum x_i = \sum \ln y_i \\ B\sum x_i + A\sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i \end{cases}$$

که در آن $m = 5$. با استفاده از داده‌های مساله می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم:

	x_i	y_i	x_i^2	$\ln y_i$	$x_i \ln y_i$
	۰	۱/۵	۰	۰/۴۰۵	۰
	۱/۰	۲/۵	۱	۰/۹۱۶	۰/۹۱۶
	۲/۰	۳/۵	۴	۱/۲۵۳	۲/۵۰۶
	۳/۰	۵/۰	۹	۱/۶۰۹	۴/۸۲۷
	۴/۰	۷/۵	۱۶	۲/۰۱۵	۸/۰۶۰
مجموع	۱۰		۳۰	۶/۱۹۸	۱۶/۳۰۹

بنابراین دستگاه زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} 5B + 10A + 6/198 \\ 10B + 30A = 16/309 \end{cases} \Rightarrow A = 0/3913, B = 0/457$$

و چون $\ln c = B$ لذا $c = e^B$ و از آن $c \simeq 1/578$ بنابراین

$$y = ce^{Ax} = 1/578e^{0/391x}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۳ـ اگر از روش اویلر در حل معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+y}$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ استفاده شود، با انتخاب $h = 0/5$ ، $y(1)$ تقریباً برابر است با:

۱) ۱/۱۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۱/۸۷۵

حل: با توجه به رابطه (۶) فصل پنجم کتاب فرمول اویلر عبارت است از:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

در این مساله داریم $h = 0/5$ و $f(t, y) = \frac{y}{t+y}$ ، چون هدف محاسبه $y(1)$ است و داریم $y(0) = y_0 = 1$

لذا بایستی $y_۱$ و $y_۲$ را به دست آوریم:

$$y(۰/۵) \simeq y_۱ = y_۰ + ۰/۵\frac{y_۰}{t_۰ + y_۰} = ۱ + ۰/۵\frac{۱}{۰ + ۱} = ۱/۵$$
$$y(۱) \simeq y_۲ = y_۱ + ۰/۵\frac{y_۱}{t_۱ + y_۱} = ۱/۵ + ۰/۵\frac{۱/۵}{۰/۵ + ۱/۵} = ۱/۵ + ۰/۳۷۵ = ۱/۸۷۵$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۴ـ درجه چند جمله‌ای که از نقاط (۰, ۲)، (۱, ۵)، (۲, ۱۴)، (۳, ۳۵)، (۴, ۷۴) می‌گذرد برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

x_i	f_i				
۰	۲				
		۳			
۱	۵		۳		
		۹		۱	
۲	۱۴		۶		۰
		۲۱		۱	
۳	۲۵		۹		
		۶۹			
۴	۷۴				

چون تفاضلات مرتبه چهارم صفر است و تفاضلات مرتبه سوم غیرصفر، لذا درجه چند جمله‌ای درونیاب ۳ می‌باشد یعنی گزینه اول صحیح است.

۵ـ با استفاده از فرمول ذوزنقه مقدار تخمینی خطا (R) برای محاسبه $\int_۰^۱ e^{-x^۲}dx$ در صورتی که تعداد فواصل یکسان و مساوی ۱۰ باشد برابر خواهد بود با:

۱) $|R| < ۰/۰۰۵$ ۲) $|R| < ۰/۰۰۲$ ۳) $|R| > ۰/۰۰۲$ ۴) $|R| > ۰/۰۰۵$

حل: داریم

$$ET(h) = -\frac{(b-a)}{۱۲}h^۲f''(\beta)$$

که در آن $n = ۱۰$، $h = \frac{b-a}{n}$، $a = ۰$ و $b = ۱$. لذا $h = \frac{۱-۰}{۱۰} = ۰/۱$

همچنین داریم:

$$f(x) = e^{-x^۲} \Rightarrow f''(x) = -۲e^{-x^۲} + ۴x^۲e^{-x^۲} = e^{-x^۲}(۴x^۲ - ۲)$$

و از آن $|f''(x)| \leq |f''(0)| \leq 2$ بنابراین

$$|ET(h)| \leq \frac{1}{12} \times (0/1)^2 \times 2 = 0/0016 \simeq 0/002$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

مهندسی شیمی مخازن هیدروکربوری کد ۱۲۵۸ سال ۱۳۷۷

۱ـ یک چند جمله‌ای درجه دوم درونیاب برای داده‌های زیر برابر کدام است؟

x	−۱	۰	+۱
y	−۱	۰	−۱

۱) $-x^2$ ۲) $-x^2+1$ ۳) x^2-1 ۴) x^2

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

x_i	y_i		
−۱	−۱		
		۱	
۰	۰		۱
		−۱	
۱	−۱		

بنابراین

$$p(x) = -1 + (x - x_0) \times 1 + (x - x_0)(x - x_1) \times 1$$
$$= -1 + (x+1) + (x+1)(x-0) = -x^2$$

لذا گزینه (۳) صحیح است. البته در چنین مسائلی بهتر است (x_i, y_i) ها را در توابع داده شده در چهار گزینه امتحان نماییم. توضیحات مسأله ۴۵ قسمت اول را ملاحظه نمایید.

۲ـ تعداد چند جمله‌ایهای از درجه بزرگتر از n که $n+1$ نقطه متمایز را درونیابی می‌کند، . . .

۱) بیش از یک است. ۲) صفر است. ۳) نامتناهی است. ۴) یک است.

حل: با توجه به این قضیه که یک و فقط یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر n وجود دارد که $n+1$ نقطه متمایز را درونیابی می‌کند، فقط یک چند جمله‌ای هست که درجهٔ آن حداکثر n است و $n+1$ نقطه متمایز را درونیابی

می‌کند. اما در مورد چند جمله‌ایهای از درجهٔ بزرگتر از n که $n+1$ نقطه متمایز را درونیابی می‌کند بیش از یک چند جمله‌ای با این خاصیت وجود دارد و در حالت کلی تعداد نامتناهی چند جمله‌ای با این خاصیت وجود دارد. به عنوان مثال از نقطه $(1,1)$ می‌توان چند جمله‌ایهای x^2 ، x^3 ، x^4 ، x^5 و به طور کلی x^n را برای $n \geq 2$ عبور داد. لذا گزینه (۳) صحیح است.

۳ـ برای تابع $f(x) = x^3 - 3x - 5$،

۱) هیچ ریشه مثبت وجود ندارد.

۲) یک ریشه در فاصله $[1, 2]$ وجود دارد.

۳) یک ریشه در فاصله $[3, 4]$ وجود دارد.

۴) یک ریشه در فاصله $[2, 3]$ وجود دارد.

حل: از اینکه $f(3) = 27 - 9 - 5 = 13$ و $f(2) = 8 - 4 - 5 = -1$ لذا $f(2)f(3) < 0$ در نتیجه در فاصله $[2, 3]$ یک ریشه وجود دارد یعنی گزینه (۴) صحیح است.

۴ـ برای پیدا کردن x، ریشه دوم یک عدد حقیقی $A > 0$ $(x = \sqrt{A})$ با استفاده از روش نیوتن رابطه تکراری کدام است؟

۱) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{A}{x_n})$

۲) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$

۳) $x_{n+1} = \frac{A}{x_n}$

۴) $x_{n+1} = \frac{x_n}{A}$

حل: با توجه به مثال ۱۰ فصل سوم برای $k = 2$ و $c = A$ رابطه تکراری روش نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۵ـ برای پیدا کردن x، وارون یک عدد حقیقی $A \neq 0$ $(x = \frac{1}{A})$ ، با استفاده از روش نیوتن رابطه تکراری کدام است؟

۱) $x_{n+1} = \frac{x_n}{A}$ ۲) $x_{n+1} = \frac{A}{x_n}$

۳) $x_{n+1} = x_n(2 + Ax_n)$ ۴) $x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n)$

حل: قرار می‌دهیم $f(x) = \frac{1}{x} - A$ لذا $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ بنابراین با توجه به رابطه تکراری نیوتن خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - A}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n + x_n - Ax_n^2 = x_n(2 - Ax_n)$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۶ـ در یک کامپیوتر با سیستم نقطه شناور برای نمایش اعداد حقیقی با فرض آنکه اعداد حقیقی A، B و C قابل نمایش باشند،

۱) امکان تولید نتیجه صفر در عبارتی شامل اعداد A، B و C وجود ندارد.

۲) مقدار محاسبه شده برای $(A + B) + C$ ممکن است با مقدار محاسبه شده برای $A + (B + C)$ متفاوت باشد.

۳) مقدار محاسبه شده برای $A + B + C$ همواره برابر با مقدار دقیق $A + B + C$ است.

۴) نمایش مقدار $A + B$ با نمایش مقدار $B + A$ ممکن است متفاوت باشد.

حل: هرگاه اعداد B و C در مقایسه با عدد A کوچک باشند، این امکان وجود دارد که $A + B$ همان A شود و جمع حاصل با C مجدداً A شود اما $B + C$ عددی (کمی) بزرگتر شود و در مقایسه با A قابل جمع شدن باشد. لذا $A + (B + C)$ با $(A + B) + C$ یکسان نیست. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۷ـ در یک کامپیوتر با سیستم نقطه شناور برای نمایش اعداد حقیقی با فرض آنکه A، B و C اعداد حقیقی قابل نمایش باشند،

۱) ممکن است محاسبه $A + B$ تولید یک عدد در ناحیه سر ریز (overflow) کند.

۲) ممکن است محاسبه $A - B$ تولید یک عدد در ناحیه زیر ریز (underflow) کند.

۳) ممکن است که مقدار محاسبه شده برای $A + C$ با مقدار A مساوی باشد.

۴) هر یک از موارد فوق.

حل: گزینه (۴) صحیح است. هر سه مورد ۱، ۲ و ۳ صحیح و درست است. برای توضیح بیشتر در ارتباط با گزینه (۳) مساله قبل را ملاحظه نمایید.

۸ـ روش ذوزنقه در تخمین انتگرال $\int_a^b 2e^{x^2} dx$ برابر کدام است؟

۱) $(b+a)[e^{a^2}+e^{b^2}]$ ۲) $(b-a)[e^{a^2}+e^{b^2}]$

۳) $\frac{(b-a)}{2}[e^{a^2}+e^{b^2}]$ ۴) $\frac{(b+a)}{2}[e^{a^2}+e^{b^2}]$

حل: هرگاه قرار دهیم $h=b-a$ و $f(x)=2e^{x^2}$ در این صورت روش ذوزنقه برای تخمین انتگرال عبارت است از:

$$I \simeq T(h) = \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{b-a}{2}[2e^{a^2}+2e^{b^2}] = (b-a)[e^{a^2}+e^{b^2}]$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۹ـ در تخمین انتگرال معین با استفاده از روشهای عددی،

۱) با استفاده از روش رامبرگ می‌توان روش‌هایی با مرتبه خطای معین را به روش‌هایی با خطاهایی از مرتبه بالاتر تبدیل نمود.

۲) روش نقطه میانی دارای خطایی از مرتبه بالاتر از روش سیمپسون است.

۳) روش‌های ذوزنقه و سیمپسون دارای خطایی از مرتبه یکسان هستند.

۴) روش ذوزنقه دارای خطایی از مرتبه بالاتر از روش سیمپسون است.

حل: با توجه به عبارت خطای روشهای نقطه میانی، ذوزنقه و سیمپسون هیچکدام از گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ صحیح نیستند. لذا گزینه (۱) صحیح است. برای دیدن توضیح روش رامبرگ لطفاً مساله ۵۶ قسمت اول را ملاحظه کنید.

۱۰ـ در تخمین انتگرال معین $I=\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{-x}}dx$ ، از آنجا که حول نقطه صفر مشکلات عددی بروز می‌کند، با تغییر متغیر می‌توان نوشت:

۱) $I=-2\int_0^1 e^{-t^2}dt$ ۲) $I=2\int_1^0 e^{-t^2}dt$

۳) $I=-2\int_1^0 e^{-t^2}dt$ ۴) $I=2\int_{-1}^0 e^{-t^2}dt$

حل: قرار می‌دهیم $-x=t^2$ بنابراین

$$dx=-2tdt \text{ و } x=0 \Rightarrow t=0 \text{ و } x=-1 \Rightarrow t=1$$

$$I=\int_1^0 \frac{e^{-t^2}}{t}(-2tdt) = -2\int_1^0 e^{-t^2}dt$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۱۱ـ تابع دیفرانسیل $y(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ معادل کدام است؟

۱) $y'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}, y(0)=0$ ۲) $y'(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}, y(0)=0$

۳) $y'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}, y(0) = 0$

۴) $y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, y(0) = 0$

حل: اولاً $y(0) = 0$ در ثانی با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۱۲ـ معادله دیفرانسیل درجه دوم با شرایط اولیه:

$$y''(x) = xy'(x) - x^2y(x) + x, \qquad y(1) = 1, y'(1) = 0$$

معادل است با دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه اول (با قرار دادن $z_1 = y$).

۱) $\begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 1 \\ z_2' = xz_1 - x^2z_2 + x & z_2(1) = 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 1 \\ z_2' = xz_2 - x^2z_1 + x & z_2(1) = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 1 \\ z_2' = xz_1 - x^2z_2 + x & z_2(1) = 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 0 \\ z_2' = xz_2 - x^2z_1 + x & z_2(1) = 0 \end{cases}$

حل: با قرار دادن $z_1 = y$ و $z_2 = z_1'$ خواهیم داشت:

$$z_2' = z_1'' = y'' = xy' - x^2y + x = xz_1' - x^2z_1 + x$$
$$= xz_2 - x^2z_1 + x$$

همچنین از اینکه $y(1) = 1$ داریم $z_1(1) = 1$ و از $y'(1) = 0$ داریم $z_1'(1) = 0$ یا $z_2(1) = 0$. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۸

۱ـ اگر روش نیوتن را برای محاسبه ریشه سوم عدد ۹ بکار ببریم، در این صورت اگر تقریب اولیه $x_0 = 2$ و دقت برابر 10^{-2} فرض شود، حداکثر بعد از چند مرحله به نتیجه خواهیم رسید؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۲

حل: با توجه به مثال ۱۰ فصل سوم رابطه تکراری تقریب $\sqrt[3]{9}$ با قرار دادن $k = 3$ و $c = 9$ عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{9}{x_n^2}\right) = \frac{2}{3}x_n + \frac{3}{x_n^2}$$

هرگاه قرار دهیم $x_۰ = ۲$ در این صورت

$$x_۱ = ۲/۰۸۳۳۳ \quad , \quad |x_۱ - x_۰| = ۰/۰۸۳۳۳$$
$$x_۲ = ۲/۰۸۰۰۹ \quad , \quad |x_۲ - x_۱| = ۰/۰۰۳۲۴$$
$$x_۳ = ۲/۰۸۰۰۸ \quad , \quad |x_۳ - x_۲| = ۰/۰۰۰۰۱ \leq ۱۰^{-۴}$$

۲ـ مقادیر جدول زیر از تابع $f(x)$ استخراج گردیده است.

x	۰	۱	۳	۶	۱۰
f(x)	۱	۶-	۴	۱۶۹	۹۲۱

مقدار تابع به ازاء $x = ۲$ برابر است با

۱) ۶ ۲) ۷- ۳) ۸- ۴) ۵/۵-

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده عبارت است از:

x	f(x)			
۰	۱			
		۷-		
۱	۶-		۴	
		۵		۱
۳	۴		۱۰		۰
		۵۵		۱
۶	۱۶۹		۱۹	
		۱۸۸		
۱۰	۹۲۱			

$$P(x) = ۱ - ۷(x - ۰) + ۴(x - ۰)(x - ۱) + x(x - ۱)(x - ۳)$$

$$P(۲) = ۱ - ۱۴ + ۸ + ۲(۱)(-۱) = -۷$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۳ـ انتگرال $I = \int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x}dx$ مفروض است. با فرض $h = ۰/۵$ و با استفاده از روش ذوزنقه مقادیر $I(h)$، $I(\frac{h}{۲})$ و $I(\frac{h}{۴})$ به ترتیب برابر ۰/۷۰۸۴، ۰/۶۹۷۰ و ۰/۶۹۴۱ محاسبه گردیده است. در صورتی که بخواهید از روش رامبرگ استفاده نمایید، مقدار $I(\frac{h}{۲}, \frac{h}{۴})$ برابر است با:

۱) ۰٫۶۹۳۴ ۲) ۰٫۶۹۳۳ ۳) ۰٫۶۹۳۱ ۴) ۰٫۶۹۲۹

حل: با توجه به مطالب نوشته شده در مورد انتگرالگیری به روش رامبرگ در مساله ۵۶ قسمت قبل داریم:

$$I(\frac{h}{۲},\frac{h}{۴})=\frac{۴I(\frac{h}{۴})-I(\frac{h}{۲})}{۳}=\frac{۴(۰٫۶۹۴۱)-۰٫۶۹۷۰}{۳}=۰٫۶۹۳۱$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۴ـ اگر روش سیمپسون را برای محاسبه $\int_{۰}^{۳} f(x)dx$ به کار ببریم که در آن $f(x)$ به وسیله جدول زیر تعریف شده است.

x_k	۰	۰٫۵	۱	۲	۳
$f(x_k)$	۱	۱	۱	۲٫۵	۱

در این صورت مقدار حاصل از این روش برابر است با

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۶

حل: داریم $h=۰٫۵$ لذا

$$\int_{۰}^{۳} f(x)dx \simeq \frac{۰٫۵}{۳}(f(۰)+۴f(۰٫۵)+۲f(۱)+۴f(۲)+f(۳))$$
$$=\frac{۰٫۵}{۳}(۱+۴+۲+۱۰+۱)=۰٫۵\times ۶=۳$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۹

۱ـ اگر ریشه معادله $f(x)=x^{۳}-x^{۲}+x-۱٫۷=۰$ را بخواهیم با استفاده از روش وتری (خط قاطع) و با مقادیر اولیه $x_۰=۱$ و $x_۱=۱٫۳$ و با دقت $۱۰^{-۳}$ محاسبه کنیم. در این صورت بعد از چند مرحله دیگر به ریشه $x_n=۱٫۲۶۸۳$ خواهیم رسید.

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل: با توجه به رابطه (۲) فصل سوم فرمول روش وتری به صورت زیر است:

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-۱})}{f(x_n)-f(x_{n-۱})}$$

در این مساله داریم $x_\circ = ۱$ ، $x_۱ = ۱/۳$ و $f(x) = x^۳ - x^۲ + x - ۱/۷$ بنابراین:

$$x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)(x_۱ - x_\circ)}{f(x_۱) - f(x_\circ)} = ۱/۳ - \frac{\circ/۱\circ۷\circ(۱/۳ - ۱)}{\circ/۱\circ۷\circ - (-\circ/۷)} = ۱/۲۶\circ۲$$

$$x_۳ = ۱/۲۶\circ۲ - \frac{(-\circ/\circ۲۶۵)(۱/۲۶\circ۲ - ۱/۳)}{-\circ/\circ۲۶۵ - \circ/۱\circ۷\circ} = ۱/۲۶۸۱$$

از اینکه $|f(x_۳)| = \circ/\circ\circ\circ۷ < ۱\circ^{-۳}$ لذا $x_۳$ تقریب موردنظر است یعنی بعد از $x_۱$ به دو تکرار دیگر نیاز داریم بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲ـ برای محاسبه $f'(x_\circ)$ از فرمول تقریبی زیر استفاده می‌کنیم:

$$f'(x_\circ) = \frac{-۳f(x_\circ) + ۴f(x_\circ + h) - f(x_\circ + ۲h)}{۲h}$$

خطای برش این فرمول برابر است با:

۱) $-\frac{h^۲}{۳}f^{(۳)}(z)$ ۲) $-\frac{h^۲}{۶}f^{(۳)}(z)$ ۳) $\frac{h^۲}{۳}f^{(۳)}(z)$ ۴) $\frac{h^۲}{۶}f^{(۳)}(z)$

حل: این مساله همان مساله ۱۲ قسمت اول است برای راه‌حل آن لطفاً به مساله مذکور مراجعه نمایید. گزینه (۳) صحیح است.

۳ـ جدول مقادیر زیر مفروض است

x	$\circ$	$\circ/۱$	$\circ/۲$	$\circ/۳$	$\circ/۴$
$f(x)$	۱	۱/۱\circ۵	۱/۲۲\circ	۱/۳۴۴	۱/۴۸۲

برای $\circ \leq x \leq \circ/۴$ ، $|f''(x)| \leq ۳/\circ$ در این صورت کدام یک از عبارات زیر در مورد انتگرال $I = \int_\circ^{\circ/۴} f(x)dx$ صحیح است؟

۱) $\circ/۴۹\circ < I < \circ/۴۹۲$ ۲) $\circ/۴۸۸ < I < \circ/۴۹\circ$

۳) $\circ/۴۹۲ < I < \circ/۴۹۴$ ۴) $\circ/۴۶۶ < I < \circ/۴۸۸$

حل: گزینه (۱) صحیح است. این مساله همان مساله ۳۷ قسمت اول است.

۴ـ اگر روش اویلر را برای حل معادله دیفرانسیل $y'' - y = \circ$ ، $y(\circ) = \circ$ ، $y'(\circ) = ۱$ و $h = \circ/۵$ بکار ببریم، آنگاه داریم:

۱) $y(۱) = ۱$ و $y'(۱) = ۱/۲۵$ ۲) $y(۱) = ۱$ و $y'(۱) = ۱/۵$

۳) $y(۱) = ۱/۵$ و $y'(۱) = ۱$ ۴) $y(۱) = ۱/۲۵$ و $y'(۱) = ۱$

حل: قرار می‌دهیم $p = y'$ لذا $p' = y''$ ، بنابراین با توجه به داده‌های مساله خواهیم داشت:

$$y'(۰) = ۱ \Rightarrow p(۰) = ۱$$

همچنین معادله دیفرانسیل عبارت است از $y'' = y$ و از آن:

$$(y')' = y \Rightarrow p' = y = f(x, y)$$

چون $h = ۰/۵$ لذا بایستی $y(x_۱)$، $y(x_۲)$ و $y'(x_۱)$ و $y'(x_۲)$ را محاسبه نماییم، بنابه فرمول اویلر:

$$p(x_۱) \simeq p(x_۰) + hy(x_۰) \Rightarrow p(۰/۵) = p(۰) + ۰/۵y(۰) = ۱ + ۰ = ۱ \Rightarrow p(۰/۵) = ۱$$

برای y خواهیم داشت:

$$y(x_۱) \simeq y(x_۰) + hy'(x_۰) = ۰ + ۰/۵(۱) = ۰/۵ \Rightarrow y(۱) = y(x_۲) \simeq$$
$$y(۰/۵) + ۰/۵y'(۰/۵) = ۰/۵ + ۰/۵P(۰/۵) = ۰/۵ + ۰/۵(۱) = ۱$$

نهایتاً

$$y'(۱) = p(۱) = p(۰/۵) + hy(۰/۵) = ۱ + ۰/۵(۰/۵) = ۱/۲۵$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۸۰

۱ـ برای یافتن ریشه پنجم عدد ۲۰ از روش نیوتن رافسون استفاده می‌نماییم. اگر نقطه شروع $x_۰ = ۲$ باشد بعد از چند مرحله به جواب $x = ۱/۸۲۰$ خواهیم رسید؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

حل: با قرار دادن $k = ۵$ و $c = ۲۰$ در رابطه به دست آمده در مثال ۱۰ فصل سوم کتاب، رابطه تکراری روش نیوتن برای یافتن ریشه پنجم عدد ۲۰ به صورت زیر است:

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۵}\left(۴x_n + \frac{۲۰}{x_n^۴}\right)$$

با $x_۰ = ۲$ خواهیم داشت:

$$x_۱ = ۱/۸۵, x_۲ = ۱/۸۲۱, x_۳ = ۱/۸۲۰۵۶, x_۴ = ۱/۸۲۰۵۶, x_۵ = x_۴ \ldots$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۲ـ فرمول خطا در محاسبه یک انتگرال به روش سیمپسون ، با کدام گزینه برابر است؟

۱) $E = (b-a)h|f'(\xi)|$

۲) $E = (b-a)\frac{h^۲}{۱۲}|f''(\xi)|$

۳) $E = (b-a)\frac{h^۴}{۱۸۰}|f^{(۴)}(\xi)|$

۴) $E = (b-a)\frac{h^۳}{۱۵۰}|f^{(۳)}(\xi)|$

حل: با توجه به رابطه (۴۸) فصل پنجم کتاب گزینه (۳) صحیح است.

۳ـ اگر بخواهیم برای داده‌های جدول زیر خط مستقیمی براساس کمترین توانهای دوم برازش بدهیم کدام گزینه مناسب است؟

x	۲٫۱۰	۶٫۲۲	۷٫۱۷	۱۰٫۵۲
f(x)	۲٫۹۰	۳٫۸۸	۵٫۹۸	۵٫۷۱

۱) $y = ۰٫۳۶۲۵x + ۲٫۲۶۰۱$

۲) $y = ۲٫۲۴۵۱x + ۰٫۳۶۲۹$

۳) $y = ۰٫۴۲۳۱x + ۱٫۸۲۳۷$

۴) $y = ۱٫۸۲۳۷x + ۰٫۴۲۳۱$

حل: هرگاه خط کمترین مربعات را به صورت $P(x) = a_۱x + a_۰$ درنظر بگیریم با توجه به این که $m = ۴$ برای نوشتن معادلات نرمال رابطه (۸) فصل هشتم کتاب جدول زیر را خواهیم داشت:

	x_i	$y_i = f(x_i)$	$x_i^۲$	x_iy_i
	۲٫۱۰	۲٫۹۰	۴٫۴۱	۶٫۰۹
	۶٫۲۲	۳٫۸۸	۳۸٫۶۸۸۴	۲۴٫۱۳۳۶
	۷٫۱۷	۵٫۹۸	۵۱٫۴۰۸۹	۴۲٫۸۷۶۶
	۱۰٫۵۲	۵٫۷۱	۱۱۰٫۶۷۰۴	۶۰٫۰۶۹۲
مجموع	۲۶٫۰۱	۱۸٫۴۷	۲۰۵٫۱۷۷۷	۱۳۳٫۱۶۹۴

معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} ۴a_۰ + ۲۶٫۰۱a_۱ = ۱۸٫۴۷ \\ ۲۶٫۰۱a_۰ + ۲۰۵٫۱۷۷۷a_۱ = ۱۳۳٫۱۶۹۴ \end{cases}$$

داده‌های گزینه ۱ (تقریباً) در دستگاه فوق صدق می‌کند، لذا گزینه (۱) صحیح است.

۴ـ اگر از روش درونیابی نیوتن، برای درونیابی داده‌های زیر استفاده کنیم، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب کدام است؟

x_k	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
y_k	۰	۴	۲	۰	۴	۲۰

۱) $x^۳ - ۲x^۲ + ۴$ ‏ ۲) $x^۳ - x^۲ - ۲x + ۴$

۳) $x^۴ - x^۳ - ۴x^۲ + ۲x + ۴$ ‏ ۴) $x^۵ - x^۴ - ۲x^۳ - ۲x^۲ + ۲x + ۴$

حل: با توجه به اینکه چند جمله‌ای درونیاب منحصر به فرد است، لذا کافی است نقاط (x_k, y_k) را در چند جمله‌ای داده شده در گزینه‌ها قرار دهیم، با انجام این عمل فقط چند جمله‌ای گزینه (۱) است که تمام نقاط در آن صدق می‌کنند، لذا گزینه ۱ صحیح است.

مهندسی شیمی ـ مخازن هیدروکربوری کد ۱۲۵۸ سال ۱۳۸۰

۱ـ مقادیر عددی تابع $y = f(x)$ در جدول زیر داده شده است و مقدار تقریبی مشتق دوم تابع را با استفاده از فرمول $f''(x_j) = \frac{\delta^۲ f_j}{h^۲}$ که در آن $\delta^۲ f_j = f_{j-۱} - ۲f_j + f_{j+۱}$ (تفاضل مرکزی) محاسبه می‌کنیم، مقدار تقریبی $f''(۲/۱)$ کدام است؟

x	۲	۲/۱	۲/۲	۲/۳	۲/۴
f(x)	۱/۴۱۴۲۱۴	۱/۴۴۹۱۳۸	۱/۴۸۳۲۹۰	۱/۵۱۶۵۷۵	۱/۵۴۹۱۹۳

۱) $f''(۲/۱) \simeq ۰/۷۷۲$ ‏ ۲) $f''(۲/۱) \simeq ۰/۰۷۷۲$

۳) $f''(۲/۱) \simeq -۰/۷۷۲$ ‏ ۴) $f''(۲/۱) \simeq -۰/۰۷۷۲$

حل: داریم $h = ۰/۱$ و $x_j = x_۱ = ۲/۱$ لذا

$$f''(x_j) = \frac{f(x_۰) - ۲f(x_۱) + f(x_۲)}{h^۲}$$
$$= \frac{۱/۴۱۴۲۱۴ - ۲(۱/۴۴۹۱۳۸) + ۱/۴۸۳۲۹۰}{۰/۰۱} = \frac{-۷/۷۲ \times ۱۰^{-۴}}{۱۰^{-۲}} \simeq -۰/۰۷۷۲$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۲ـ خطای انتگرال $\int_۱^۳ x^۲ dx$ با استفاده از روش Simpson معمولی چند درصد می‌باشد؟ $(h = ۱)$

۱) ۰ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۴

حل: با توجه به اینکه روش سیمپسون برای چند جمله‌ای‌های درجه دوم دقیق است لذا خطا برای انتگرال بیان شده صفر است یعنی گزینه (۱) صحیح است.

۳ـ خطای مشتق دوم داده شده، با کدام گزینه برابر است؟ $y_i'' = \frac{y_{i+۱} - ۲y_i + y_{i-۱}}{h^۲}$

۱) h ۲) h^2 ۳) h^3 ۴) $2h$

حل: با توجه به بسط تیلور برای توابع $y_{i+1} = f(x_{i+1})$ و $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ داریم:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i) + \dots$$
$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

با جمع کردن دو رابطه خواهیم داشت:

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + h^2f''(x_i) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

بنابراین

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

بنابراین چون جمله غالب سمت راست از مرتبه h^2 است گزینه (۲) صحیح است.

۴ـ رابطه تکرار شونده برای محاسبهٔ جذر عدد حقیقی $N > 0$، با استفاده از روش نیوتن در حل معادله $x^2 - N = 0$، کدام است؟

۱) $x_n = \frac{1}{2}(x_n - \frac{N}{x_n}), n = 0, 1, 2, \dots$

۲) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - \frac{N}{2x_n}), n = 0, 1, 2, \dots$

۳) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{N}{2x_n}), n = 0, 1, 2, \dots$

۴) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{N}{x_n}), n = 0, 1, 2, \dots$

حل: با قرار دادن $c = N$ و $k = 2$ در رابطه به دست آمده در مثال ۱۰ فصل سوم کتاب روند تکراری نیوتن برای حل معادله فوق عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{N}{x_n})$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

۵ـ کدام الگوریتمها برای حل دستگاه N معادله خطی، N مجهولی به روشهای تکراری (I) جاکوبی (Jacobi)(II) گاوس سایدل (Gauss − Seidel) ، به ترتیب مناسب و صحیح است؟

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = b_N$$

۱) $\mathrm{I})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}\ ,\ (\mathrm{II})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

۲) $\mathrm{I})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}\ ,\ (\mathrm{II})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

۳) $\mathrm{I})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}\ ,\ (\mathrm{II})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

۴) $\mathrm{I})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}\ ,\ (\mathrm{II})x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

حل: باتوجه به روابط نوشته شده برای روشهای تکراری ژاکوبی و گاوس سایدل در فصل ششم کتاب گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۸۱

۱ـ اگر روش گاوس دو نقطه‌ای را برای محاسبهٔ انتگرال $\int_0^2 x^3 dx$ به کار ببریم، مقدار حاصل چقدر است؟ (دقت ۲ رقم اعشار بعد از ممیز)

۱) ۶٫۲۲ ۲) ۶٫۳۳ ۳) ۶٫۳۶ ۴) ۶٫۶۳

حل: داریم $a = 0$ و $b = 2$ برای تبدیل انتگرال به صورت انتگرالی با کرانهای ۱+ و ۱− تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] = \frac{1}{2}[(2-0)u + (2+0)] = u + 1$$

لذا

$$dx = du$$

و از آن:

$$\int_0^2 x^3 dx = \int_{-1}^{1} (u+1)^3 du \simeq \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^3$$

$$= 6/19 + 0/03 = 6/22$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۲ـ شرط همگرایی روش نیوتن ـ رافسون برای حل معادلهٔ $f(x) = ۰$ در نقطه شروع $x_۰$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\left|\frac{f(x_۰)}{f'(x_۰)}\right| < ۱$

۲) $\frac{|f(x_۰)f''(x_۰)|}{[f'(x_۰)]^۲} < ۱$

۳) $|f(x_۰)f'(x_۰)| < ۱$

۴) $\frac{|f(x_۰)f'(x_۰)|}{[f''(x_۰)]^۲} < ۱$

حل: شرط کافی همگرایی روش تکرار ساده این است که $|g'(x)| < ۱$. در روش نیوتن تابع $g(x)$ عبارت است از:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

لذا

$$g'(x) = ۱ - \frac{[f'(x)]^۲ - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^۲} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^۲}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۳ـ برای حل دستگاه $\begin{cases} ۸x + ۲y + ۳z = ۳۰ \\ x - ۹y + ۲z = ۱ \\ ۲x + ۳y + ۶z = ۳۱ \end{cases}$ از روش تکرار گاوس ـ سایدل استفاده می‌کنیم. اگر $(x_۰, y_۰, z_۰) = (۱ \text{ و } ۱ \text{ و } ۱)$ در این صورت $(x_۳, y_۳, z_۳)$ کدام است؟

۱) $(۲/۰۲۲, ۰/۹۸۹, ۳/۹۹۷)$

۲) $(۲/۱۷۴, ۰/۹۹۶, ۳/۹۹۷)$

۳) $(۲/۱۷۴, ۰/۹۸۹, ۳/۹۹۷)$

۴) $(۲/۰۲۲, ۰/۹۹۶, ۳/۹۴۳)$

حل: فرمول تکراری روش گاوس ـ سایدل عبارت است از:

$$x^{(k+۱)} = \frac{۱}{۸}[۳۰ - ۲y^{(k)} - ۳z^{(k)}]$$
$$y^{(k+۱)} = -\frac{۱}{۹}[۱ - x^{(k+۱)} - ۲z^{(k)}]$$
$$z^{(k+۱)} = \frac{۱}{۶}[۳۱ - ۲x^{(k+۱)} - ۳y^{(k+۱)}]$$

با قرار دادن $x^{(۰)} = y^{(۰)} = z^{(۰)} = ۱$ تکرارهای بعدی مطابق جدول زیر به دست می‌آیند:

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
۰	۱	۱	۱
۱	۳/۱۲۵	۰/۴۵۸	۳/۸۹۶
۲	۲/۱۷۴	۰/۹۹۶	۳/۹۴۴
۳	۲/۰۲۲	۰/۹۹۰	۳/۹۹۸

با توجه به درنظر گرفتن خطاهای محاسبه و با توجه به گزینه‌های داده شده، گزینه (۱) صحیح است.

۴ـ تابع $f(x)$، تعریف شده توسط جدول داده‌های زیر مفروض است. مشتق مرتبهٔ دوم تابع مزبور در نقطه $x_۰ = ۱$ چقدر است؟ $(f''(۱) = ?)$

x_i	۱/۰	۱/۱	۱/۲
$f(x_i)$	۷/۱۹	۸/۴۶	۹/۸۵

۱) ۹   ۲) ۱۰   ۳) ۱۱   ۴) ۱۲

حل: برای محاسبه مشتق‌های مرتبه اول و دوم در نقطه $x_۰$ فرمول‌های زیر می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند:

$$f'(x_۰) \simeq \frac{۱}{h^۲}(\Delta f_۰ - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_۰ + \frac{۱}{۳}\Delta^۳ f_۰ - \frac{۱}{۴}\Delta^۴ f_۰ + \dots)$$

و

$$f''(x_۰) \simeq \frac{۱}{h^۲}(\Delta^۲ f_۰ - \Delta^۳ f_۰ + \frac{۱۱}{۱۲}\Delta^۴ f_۰)$$

در هر مورد یک یا چند جمله از عبارات درون پرانتز را می‌توانیم انتخاب نموده و مشتق‌های موردنظر را محاسبه نماییم. در این مسئله چون هدف محاسبه $f''(x_۰)$ است و سه مقدار برای $f(x_i)$ داریم لذا رابطه را به‌صورت $f''(x_۰) \simeq \frac{\Delta^۲ f_۰}{h^۲}$ درنظر می‌گیریم. چون $h = ۰/۱$ و $x_۰ = ۱$ لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f''(۱) &\simeq \frac{۱}{h^۲}(f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + f_i) \\ &= \frac{۹/۸۵ - ۲ \times ۸/۴۶ + ۷/۱۹}{(۰/۱)^۲} = \frac{۰/۱۲}{۰/۰۱} = ۱۲ \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مهندسی شیمی ـ مخازن هیدروکربوری کد ۱۲۸۵ سال ۱۳۸۱

۱ـ مطابق جدول زیر تابع $f(x)$ بر حسب x نمایش داده شده است. تعیین کنید مقدار تابع در نقطه $x = ۱/۵$ به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟ ۰/۵۵

x	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
$f(x)$	۰/۷۶	۰/۶۲	۰/۴۵	۰/۲۸	۰/۱۱

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵۱ ۳) ۰/۴۸ ۴) ؟

حل: با توجه به اینکه $۱/۵ \in (۱/۳, ۱/۶)$ لذا بهترین کار استفاده از درونیابی خطی بین دو نقطه $(۱/۳, ۰/۶۲)$ و $(۱/۶, ۰/۴۵)$ می‌باشد. خط گذرنده از این دو نقطه به صورت زیر است:

$$\frac{y - ۰/۶۲}{۰/۴۵ - ۰/۶۲} = \frac{x - ۱/۳}{۱/۶ - ۱/۳} \Rightarrow y = ۰/۶۲ - ۰/۵۶۷(x - ۱/۳)$$

بنابراین

$$f(۱/۵) = y(۱/۵) \simeq ۰/۶۲ - ۰/۵۶۷(۱/۵ - ۱/۳) = ۰/۵۰۷ \simeq ۰/۵۱$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۲ـ کدام رابطه عددی زیر مشتق دوم y برحسب x را $\left(\frac{d^۲y}{dx^۲}\right)$ در نقطه i براساس تفاضلهای مستقیم (forward difference) نشان می‌دهد؟ $(\Delta x = h)$

۱) $(y_{i-۲} - ۲y_{i-۱} + y_i)/h^۲$ ۲) $(y_{i+۱} - ۲y_i - +y_{i-۱})/h^۲$

۳) $(y_{i+۲} - ۲y_{i+۱} + y_i)/h^۲$ ۴) $(y_{i-۱} + ۲y_{i-۱} + y_i)/h^۲$

حل: با توجه به رابطه (۲۰) فصل چهارم کتاب، گزینه (۲) صحیح است.

۳ـ کدام عبارت از فرمول $f'_i = \frac{۱}{h}[\Delta - \frac{\Delta^۲}{۲} + \frac{\Delta^۳}{۳}]f_i$ حاصل می‌شود؟

۱) $f'_i = \frac{۱}{۲h}[-f_{i-۱} + f_{i+۱}]$

۲) $f'_i = \frac{۱}{۲h}(-۳f_i + ۴_{i+۱} - f_{i+۲})$

۳) $f'_i = \frac{۱}{۶h}(-۱۱f_i + ۱۸f_{i+۱} - ۹f_{i+۲} + ۲f_{i+۳})$

۴) $f'_i = \frac{۱}{۶h}(-۲f_{i-۱} - ۳f_i + ۶f_{i+۱} - f_{i+۲})$

حل: با توجه به رابطه (۹) فصل چهارم کتاب داریم

$$\frac{۱}{h}[\Delta f_i - \frac{۱}{۲}\Delta^۲ f_i] = \frac{۱}{h}[۲f_{i+۱} - \frac{۱}{۲}f_{i+۲} - \frac{۳}{۲}f_i]$$

بنابراین کافی است $\frac{h}{3}\Delta^3 f_i$ را به مقدار فوق اضافه کنیم، داریم:

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

لذا

$$\frac{1}{h}[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}]f_i = \frac{1}{h}[2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i + \frac{1}{3}f_{i+3} - f_{i+2} + f_{i+1} - \frac{1}{3}f_i]$$
$$= \frac{1}{h}[3f_{i+1} - \frac{3}{2}f_{i+2} + \frac{1}{3}f_{i+3} - \frac{11}{6}f_i] = \frac{1}{6h}[18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3} - 11f_i]$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر (دانشگاه آزاد اسلامی ـ کلیه گرایشها) سال ۱۳۷۸

۱ـ با استفاده از روش مینیمم مربعات معادلهٔ بهترین خط راستی را که نشان‌دهندهٔ نقاط زیر است به‌دست آورید.

x	۱٫۱	۲٫۹	۴٫۳	۶٫۲
f(x)	۵۰	۴۳	۲۸	۲۵

۱) $g(x) = 50 - 2.8813x$

۲) $g(x) = 55.7167 - 5.30116x$

۳) $g(x) = 55.1213 - 4.0782x$

۴) $g(x) = 43.564 + 6.8321x$

حل: در این مساله داریم $m = 4$ بنابراین هرگاه $g(x) = a_1x + a_0$ معادله بهترین خط راست برازش کننده نقاط داده شده باشد با توجه به رابطه (۸) فصل هشتم کتاب، معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} 4a_0 + (\sum x_i)a_1 = \sum y_i \\ (\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 = \sum x_iy_i \end{cases}$$

برای تشکیل دستگاه جدول زیر را ایجاد می‌کنیم:

	x_i	$y_i = f(x_i)$	x_i^2	x_iy_i
	۱٫۱	۵۰	۱٫۲۱	۵۵
	۲٫۹	۴۳	۸٫۴۱	۱۲۴٫۷
	۴٫۳	۲۸	۱۸٫۴۹	۱۲۰٫۴
	۶٫۲	۲۵	۳۸٫۴۴	۱۵۵
مجموع	۱۴٫۵	۱۴۶	۶۶٫۵۶	۴۵۵٫۱

بنابراین معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} ۴a_۰ + ۱۴/۵a_۱ = ۱۴۶ \\ ۱۴/۵a_۰ + ۶۶/۵۵a_۱ = ۴۵۵/۱ \end{cases}$$

با قرار دادن $a_۰$ و $a_۱$ گزینه‌های داده شده داده‌های گزینه (۲) در دستگاه فوق صدق می‌کند، لذا گزینه (۲) صحیح است.

۲ـ با استفاده از روش مینیمم مربعات معادلهٔ بهترین خط راستی را که نشان‌دهندهٔ نقاط زیر است به‌دست آورید.

x	۲/۱	۶/۲۲	۷/۱۷	۱۰/۵۲	۱۳/۶۸
f(x)	۲/۹	۳/۸۳	۵/۹۸	۵/۷۱	۷/۷۱

۱) $g(x) = ۲/۰۳۸۳۹ + ۰/۴۰۲۳۱۹x$

۲) $g(x) = ۱/۵۸ + ۰/۵۵۵x$

۳) $g(x) = ۱ + ۰/۵۶۷x$

۴) $g(x) = ۲/۹ + ۰/۴۵۶۷x$

حل: مشابه مسأله ۱ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

	x_i	$y_i = f(x_i)$	$x_i^۲$	x_iy_i
	۲/۱	۲/۹	۴/۴۱	۶/۰۹
	۶/۲۲	۳/۸۳	۳۸/۶۸۸۴	۲۳/۸۲۲۶
	۷/۱۷	۵/۹۸	۵۱/۴۰۸۹	۴۲/۸۷۶۶
	۱۰/۵۲	۵/۷۱	۱۱۰/۶۷۰۴	۶۰/۰۶۹۲
	۱۳/۶۸	۷/۷۱	۱۸۷/۱۴۲۴	۱۰۵/۴۷۲۸
مجموع	۳۹/۶۹	۲۶/۱۳	۳۹۲/۳۲۰۱	۲۳۸/۳۳۱۲

با توجه به اینکه $m = ۵$ معادلات نرمال برای تعیین $a_۰$ و $a_۱$ از $g(x) = a_۱x + a_۰$ عبارتند از:

$$\begin{cases} ۵a_۰ + ۳۹/۶۹a_۱ = ۲۶/۱۳ \\ ۳۹/۶۹a_۰ + ۳۹۲/۳۲۰۱a_۱ = ۲۳۸/۳۳۱۲ \end{cases}$$

با قرار دادن $a_۰$ و $a_۱$ گزینه‌های داده شده داده‌های گزینه (۱) در دستگاه فوق صدق می‌کند، لذا گزینه (۱) صحیح است.

۳ـ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش تقریب چهارم رونگه کوتا در یک مرحله $(t = ۰/۱)$ و $\Delta t = ۰/۱$ محاسبه کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{۴t}{y} - ty \\ y(۰) = ۳ \qquad y(t = ۰/۱) = ? \end{cases}$$

۱) $y(t=0/1)=2/119437$ ۲) $y(t=0/1)=3/111412$

۳) $y(t=0/1)=2/991697$ ۴) $y(t=0/1)=3/051124$

حل: فرمول رونگه ـ کوتای مرتبه چهار به صورت زیر است:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

که در آن ۳ = y_0 و برای $h=\Delta t = 0/1$ و $f(t,y)=\frac{4t}{y}-ty$ داریم:

$$k_1 = hf(t_0, y_0) = 0/1(0) = 0$$

$$k_2 = hf(t_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1}{2}) = 0/1f(0/05, 3) = 0/1(\frac{4\times 0/05}{3} - 0/05\times 3) = -0/008333$$

$$k_3 = hf(t_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2}{2}) = 0/1f(0/05, 2/99583)$$

$$= 0/1(\frac{4\times 0/05}{2/99583} - 0/05\times 2/99583) = -0/0083032$$

$$k_4 = hf(t_0+h, y_0+k_3) = 0/1f(0/1, 2/991697)$$

$$= 0/1(\frac{4\times 0/1}{2/991697} - 0/1\times 2/991697) = -0/016547$$

بنابراین

$$y(0/1) \simeq y_1 = 3 + \frac{1}{6}(-0/0498194) = 2/9916967767 \simeq 2/991697$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۴ـ مقدار عددی x را در تکرار سوم برای معادلهٔ زیر از طریق روش نیوتن رافسون به‌دست آورید. حدس اولیه $x_0=1$، $x^2=9$.

۱) $x=3/4$ ۲) $x=3/0001$ ۳) $x=2/9995$ ۴) $x=3/02353$

حل: فرمول تکراری نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{9}{x_n})$$

با ۱ = x_0 خواهیم داشت:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3/4$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۵ـ با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ برای داده‌های زیر $F(۷)$ را به‌دست آورید.

x	۱	۲	۴	۸
F(x)	۱	۳	۷	۱۱

۱) $F(۷) = ۱۰/۲۲۵$ ۲) $F(۷) = ۱۰/۸۵۷$ ۳) $F(۷) = ۱۰/۵۵۵$ ۴) $F(۷) = ۹/۵۸۷$

حل: چند جمله‌ایهای لاگرانژ $L_j(x)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$L_۰(x) = \frac{(x-۲)(x-۴)(x-۸)}{(۱-۲)(۱-۴)(۱-۸)} = \frac{(x-۲)(x-۴)(x-۸)}{-۲۱}$$

$$L_۱(x) = \frac{(x-۱)(x-۴)(x-۸)}{(۲-۱)(۲-۴)(۲-۸)} = \frac{(x-۱)(x-۴)(x-۸)}{۱۲}$$

$$L_۲(x) = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۸)}{(۴-۱)(۴-۲)(۴-۸)} = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۸)}{-۲۴}$$

$$L_۳(x) = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{(۸-۱)(۸-۲)(۸-۴)} = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{۱۶۸}$$

با توجه به اینکه چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از $\sum_{j=۰}^{۳} F_j L_j(x) = P(x)$ لذا

$$F(۷) \simeq P(۷) = -\frac{(۷-۲)(۷-۴)(۷-۸)}{۲۱} + ۳\frac{(۷-۱)(۷-۴)(۷-۸)}{۱۲}$$
$$-\frac{۷}{۲۴}(۷-۱)(۷-۲)(۷-۸) + \frac{۱۱}{۱۶۸}(۷-۱)(۷-۲)(۷-۴)$$
$$\simeq ۰/۷۱۴ - ۴/۵ + ۸/۷۵ + ۵/۸۹۳ = ۱۰/۸۵۷$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۶ـ با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ $F(۱/۹۵) = ?$، در صورتی که می‌دانیم:

x	۱/۲	۱/۷	۱/۸	۲
F(x)	۳/۳۲۰۱	۵/۴۷۳۹	۶/۰۴۹۶	۷/۳۸۹۱

۱) $F(۱/۹۵) = ۶/۷۵$ ۲) $F(۱/۹۵) = ۶/۵$

۳) $F(۱/۹۵) = ۶/۲۵$ ۴) $F(۱/۹۵) = ۷/۰۲۹$

حل: مشابه مسأله قبل داریم:

$$L_۰(x)=\frac{(x-۱/۷)(x-۱/۸)(x-۲)}{(۱/۲-۱/۷)(۱/۲-۱/۸)(۱/۲-۲)}=-\frac{(x-۱/۷)(x-۱/۸)(x-۲)}{۰/۲۴}$$

$$L_۱(x)=\frac{(x-۱/۲)(x-۱/۸)(x-۲)}{(۱/۷-۱/۲)(۱/۷-۱/۸)(۱/۷-۲)}=\frac{(x-۱/۲)(x-۱/۸)(x-۲)}{۰/۰۱۵}$$

$$L_۲(x)=\frac{(x-۱/۲)(x-۱/۷)(x-۲)}{(۱/۸-۱/۲)(۱/۸-۱/۷)(۱/۸-۲)}=-\frac{(x-۱/۲)(x-۱/۷)(x-۲)}{۰/۰۱۲}$$

$$L_۳(x)=\frac{(x-۱/۲)(x-۱/۷)(x-۱/۸)}{(۲-۱/۲)(۲-۱/۷)(۲-۱/۸)}=\frac{(x-۱/۲)(x-۱/۷)(x-۱/۸)}{۰/۰۴۸}$$

چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از $P(x)=\sum_{j=۰}^{۳}F_jL_j(x)$ بنابراین

$$F(۱/۹۵)\simeq P(۱/۹۵)=\frac{-۳/۳۲۰۱}{۰/۲۴}(۱/۹۵-۱/۷)(۱/۹۵-۱/۸)(۱/۹۵-۲)$$

$$+\frac{۵/۴۷۳۹}{۰/۰۱۵}(۱/۹۵-۱/۲)(۱/۹۵-۱/۸)(۱/۹۵-۲)-\frac{۶/۰۴۹۶}{۰/۰۱۲}(۱/۹۵-۱/۲)(۱/۹۵-۱/۷)(۱/۹۵-۲)$$

$$+\frac{۷/۳۸۹۱}{۰/۰۴۸}(۱/۹۵-۱/۲)(۱/۹۵-۱/۷)(۱/۹۵-۱/۸)=۰/۰۲۶-۲/۰۵۳+۴/۷۲۶+۴/۳۳۰=۷/۰۲۹$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۷ـ اگر مقدار A برابر ۱۰۰ و مقدار خطای آن ۱۶ درصد باشد یعنی $A=۱۰۰\pm ۱۶\,\%$ مقدار عددی $\sqrt{A}$ و خطای آن چقدر است؟ $\sqrt{A}=?$

۱) $۱۰\pm ۰/۸\%$ ۲) $۱۰\pm ۰/۴\%$ ۳) $۱۰\pm ۲\%$ ۴) $۱۰\pm ۱۶\%$

حل: از اینکه $A=۱۰۰\pm ۰/۱۶$ لذا

$$۱۰۰-۰/۱۶\le A\le ۱۰۰+۰/۱۶\Rightarrow ۹۹/۸۴<A\le ۱۰۰/۱۶\Rightarrow ۹/۹۹۲\le\sqrt{A}\le ۱۰/۰۰۸$$

$$۱۰-\frac{۰/۸}{۱۰۰}\le\sqrt{A}\le ۱۰+\frac{۰/۸}{۱۰۰}$$

و یا

بنابراین $\sqrt{A}=۱۰\pm ۰/۸\%$. لذا گزینه (۱) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر (دانشگاه آزاد اسلامی ـ کلیه گرایشها) سال ۱۳۷۹

۱ـ کدام یک از جملات زیر غلط است؟

۱) روش نصف کردن فاصله (Bisection) حتماً به جواب می‌رسد.

۲) در روش Newton - Raphson اگر نقطه شروع نزدیک به ریشه باشد. به سرعت به جواب می‌رسیم.

۳) در روش Secant حتماً به جواب نهایی می‌رسیم.

۴) در روش succesive approximation ممکن است به جواب نهایی نرسیم.

حل: با توجه به نکته بیان شده در بخش ۴.۳.۲ از فصل سوم کتاب، روش وتری یا secant همگرایی تضمین شده ندارد. لذا گزینه موردنظر گزینه (۳) است.

۲ـ اگر هدف برازش یک منحنی از نوع $y = ae^{-bx}$ باشد، انتقال استفاده شده چه خواهد بود؟

۱) $z = \dfrac{-\ln y}{1 + 10y}$ ‏ ‏ ‏ ۲) $z = e^{\ln y} - e^{\ln(-y)}$

۳) $t = e^{\ln(-y)} - e^{\ln y}$ ‏ ‏ ‏ ۴) $z = \ln y$

حل: ابتدا از طرفین رابطه $y = ae^{-bx}$ لگاریتم می‌گیریم $\ln y = \ln a - bx$ پس قرار می‌دهیم $z = \ln y$. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۳ـ یک چند جمله‌ای با کمترین درجه براساس اعداد داده شده در جدول زیر ارائه دهید:

x	۱/۰	۱/۵	۲/۰	۲/۵	۳/۰
f(x)	۲/۰۰۰	۳/۳۷۵	۷/۰۰۰	۱۳/۶۲۵	۲۴/۰۰۰

۱) $x^4 - 2x^2 + 3$ ‏ ‏ ‏ ۲) $x^3 + 2x - 1$

۳) $x^3 - 2x + 3$ ‏ ‏ ‏ ۴) $x^4 + x^3 - x^2 + 3$

حل: هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x)$ باشد در این صورت $P(x_i) = f(x_i)$ برای x_iهای داده شده در جدول با قرار دادن نقاط x_i و چند جمله‌ای‌های داده شده در گزینه‌ها فقط چند جمله‌ی گزینه (۳) است که در شرط بیان شده صدق می‌کند، لذا گزینه ۳ صحیح است.

۴ـ اگر $P_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$ آنگاه کدامیک از نامعادلات زیر دقیق‌تر است؟

۱) $P_{10} \leq \frac{1}{11}$ ‏ ‏ ‏ ۲) $P_{10} \leq \frac{1}{110}$ ‏ ‏ ‏ ۳) $P_{10} \leq \frac{1}{22}$ ‏ ‏ ‏ ۴) $P_{10} \leq \frac{1}{220}$

حل: با توجه به اینکه $0 \leq x \leq 1$ لذا $-1 \leq x - 1 < 0$ و از آن

$$e^{-1} \leq e^{x-1} \leq 1$$

و چون $0 \leq x^n \leq 1$ لذا

$$e^{-1}x^n \leq x^n e^{x-1} \leq x^n$$

با انتگرالگیری از طرفین نامساوی فوق خواهیم داشت:

$$e^{-1}\int_{0}^{1} x^{n}dx \leq \int_{0}^{1} x^{n}e^{x-1}dx \leq \int_{0}^{1} x^{n}dx$$

و یا

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \leq P_{n} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow P_{10} \leq \frac{1}{11}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

قسمت سوم (مسائل چهار گزینه‌ای حل نشده)

۱ـ معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = x + y$ با شرط اولیه $y(۰) = ۱$ مفروض است، مقدار تقریبی $y(۰/۲)$ به روش اویلر و با $h = ۰/۱$ کدام است؟

۱) ۱/۲۲   ۲) ۱/۰۸   ۳) ۱/۱۸   ۴) ۱/۱

۲ـ در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$ مقدار $y(۰/۱)$ با استفاده از روش رونگ ـ کوتای مرتبه ۲ و $h = ۰/۱$ کدام است؟

۱) ۱/۱۱   ۲) ۱/۲   ۳) ۱/۲۱   ۴) ۱/۱۵

۳ـ در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$ با استفاده از روش اویلر و $h = ۰/۲۵$ مقدار $y(۰/۵)$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵۳۰   ۲) ۱/۵۶۲۵   ۳) ۱/۳۰۵   ۴) ۱/۲۴۵

۴ـ در معادله $\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$ مقدار $y(۰/۱)$ با استفاده از فرمول رونگ ـ کوتای مرتبه چهارم و $h = ۰/۱$ کدام است؟

۱) ۱/۱۱۵   ۲) ۱/۱۳۵   ۳) ۱/۱۲۰۵   ۴) ۱/۱۱۰۳۴

۵ـ در صورتی که $y' = -xy^۲$ و $y(۰) = ۲$ با استفاده از روش اویلر، با طول گام ۰/۲ مقدار $y(۰/۴)$ چند است؟

۱) ۱/۸۵   ۲) ۱/۶   ۳) ۱/۸۴   ۴) ۱/۶۵

۶ـ کدام رابطه برای حل تقریبی $\begin{cases} y' = y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$ به روش رونگ ـ کوتای مرتبه دوم صحیح است؟

$(x_{m+۱} = x_m + h)$

۱) $y_{m+۱} = y_m(۱ + h + \frac{h^۲}{۲})$ ۲) $y_{m+۱} = y_m(۱ + ۲h + h^۲)$

۳) $y_{m+۱} = y_m(۱ - h + h^۲)$ ۴) $y_{m+۱} = y_m(۱ - \frac{h}{۲} + \frac{h^۲}{۲})$

۷ـ در مسأله قبل عبارت متناظر با y_{m+1} در روش رونگ ـ کوتای مرتبه چهارم کدام است؟

۱) $(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24})y_m$
۲) $(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{8}+\frac{h^4}{16})y_m$
۳) $(1+h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24})y_m$
۴) $(1-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{8}+\frac{h^4}{16})y_m$

۸ـ در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ مقدار $y(0{,}1)$ با استفاده از روش بسط تیلور مرتبه دوم کدام است؟ $(h = 0{,}1)$

۱) ۱٫۲۰
۲) ۱٫۲۲
۳) ۱٫۴۵
۴) ۱٫۹۸

۹ـ برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 100x + 1 = 0$ کدام یک از روابط زیر تقریب دقیقتری به دست می‌دهند؟

۱) $\begin{cases} x_1 = -50 - \sqrt{2499} \\ x_2 = \dfrac{1}{x_1} \end{cases}$
۲) $\begin{cases} x_1 = -50 + \sqrt{2499} \\ x_2 = \dfrac{1}{x_1} \end{cases}$
۳) $\begin{cases} x_1 = -50 - \sqrt{2499} \\ x_2 = -100 - x_1 \end{cases}$
۴) $\begin{cases} x_1 = -50 + \sqrt{2499} \\ x_2 = -50 - \sqrt{2499} \end{cases}$

۱۰ـ چنانچه x و y از روابط $y = \frac{bc}{a}$ و $x = \frac{1}{y^2}$ محاسبه شوند و δ_a، δ_b، δ_c، δ_x به ترتیب خطای نسبی a، b، c و x باشند، کدامیک از روابط زیر بین آنها برقرار است؟

۱) $\delta_x \leqslant \delta_a + \delta_b + \delta_c$
۲) $\delta_x \leqslant (\delta_a + \delta_b + \delta_c)^2$
۳) $\delta_x \leqslant 2(\delta_a + \delta_b + \delta_c)$
۴) $\delta_x \leqslant \delta_b + \delta_c - \delta_a$

۱۱ـ برای اندازه‌گیری مساحت یک دایره از دو روش می‌توان استفاده کرد، نخست اندازه‌گیری قطر دایره (D) توسط خطکش و استفاده از فرمول $S = \frac{1}{4}\pi D^2$ ، در روش دوم شعاع دایره (R) را با خطکش اندازه گرفته و از فرمول $S = \pi R^2$ استفاده می‌شود. کدام روش خطای مطلق کمتری تولید می‌کند؟ فواصل خطکش ۱ میلی‌متر می‌باشد و برای مقدار π تقریب مناسبی از آن استفاده می‌شود.

۱) روش اول
۲) روش دوم
۳) تفاوتی نمی‌کند.
۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

۱۲ـ چنانچه α ریشه معادله $f(x)=0$ بوده و مرتبه تکرار آن ۲ باشد کدام گزینه در مورد همگرایی روش نیوتن به صورت $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ صحیح است؟

۱) مرتبه همگرایی = ۲ و سرعت همگرایی = ۱

۲) مرتبه همگرایی = ۱ و سرعت همگرایی = $\frac{1}{2}$

۳) مرتبه همگرایی = سرعت همگرایی = ۱

۴) هیچکدام

۱۳ـ معادله $x\cos x-1=0$ چند ریشه دارد؟

۱) ریشه ندارد. ۲) ۳ ریشه ۳) ۵ ریشه ۴) بی‌نهایت ریشه

۱۴ـ برای به دست آوردن ریشه معادله $x^3+x-1=0$ در فاصله $(0,1)$ به روش نصف کردن فاصله (دو بخشی) و با دقت 10^{-3} احتیاج به چند تکرار داریم؟

۱) ۱۰ تکرار ۲) ۸ تکرار ۳) ۷ تکرار ۴) ۶ تکرار

۱۵ـ مقدار $y(0/1)$ و $y(0/2)$ از معادله‌ی $y'=x+y$ با شرایط اولیه‌ی $y(0)=0$ با استفاده از روش تیلور مرتبه دوم کدام است؟ (با فرض $h=0/1$)

۱) ۰/۰۱ و ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۰۵ و ۰/۰۲۱ ۳) ۰/۰۰۵ و ۰/۰۲۵ ۴) ۰/۰۰۵ و ۱/۰۰۵

۱۶ـ اگر روش اویلر را برای حل معادله‌ی دیفرانسیل $y''-y=0$، $y'(0)=1$ و $h=0/5$ به کار ببریم آنگاه داریم:

۱) $y(1)=1, y'(1)=1/25$ ۲) $y(1)=1, y'(1)=1/5$

۳) $y(1)=1/5, y'(1)=1$ ۴) $y(1)=1/25, y'(1)=1$

۱۷ـ اگر از روش اویلر در حل معادله‌ی دیفرانسیل $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{t+y}$ با شرط اولیه‌ی $y(0)=1$ استفاده شود، با انتخاب $h=0/5$، $y(1)$ تقریباً برابر است با:

۱) ۱/۱۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۱/۸۷۵

۱۸ـ روش اویلر را برای معادله دیفرانسیل $y'=2y$ به کار برده و باتوجه به اینکه $x_0=0$ و $y_0=1$، $h=0/05$ جواب معادله در نقاط x_1 و x_2 و x_3 به ترتیب کدام است؟

۱) ۱/۱، ۱/۲۱، ۱/۳۳ ۲) ۱/۲۱، ۱/۳۳، ۱/۱ ۳) ۱/۳، ۱/۳۱، ۱/۲۲ ۴) ۲/۱، ۲/۳، ۲/۱۲

۱۹ـ حل معادله‌ی دیفرانسیل زیر به روش اویلر $y_0=-1$ و $x_0=2$ و $y(2)=1$ و $y'=xy$ و $h=0/1$ برای y_2 کدام است؟

۱) ۱٫۴۷۷۴۱ ۲) ۱٫۷۷۱۴۴ ۳) ۲٫۰۰۱۲۱ ۴) ۱٫۶۳۴۵۲

۲۰ـ الگوریتم تیلور از مرتبه‌ی ۳ را در مورد معادله‌ی دیفرانسیل زیر به کار برده و مقادیر تقریبی $y(۰٫۱)$ و $y(۰٫۲)$ کدام است؟ $(y' = e^x, h = ۰٫۱, y(۰) = ۱)$

۱) ۱٫۴۹۸۴۲، ۱٫۴۲۱۳۸ ۲) ۱٫۷۳۵۹۲، ۱٫۵۴۳۸۲

۳) ۱٫۱۰۵۱۶۷، ۱٫۲۲۱۳۹ ۴) ۱٫۱۱۱۸۹، ۱٫۸۷۳۲۳

۲۱ـ با استفاده از روش رونگ ـ کوتای مرتبه‌ی ۴، جواب‌های $x_۱$ و $y_۱$ از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + ۲y \\ \dfrac{dy}{dt} = ۳x + ۲y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(۰) = ۶ \\ y(۰) = ۴ \end{cases} \quad h = ۰٫۰۲, [۰, ۰٫۲]$$

۱) $x_۱ = ۶٫۲۹۳۵۴۵۵۱$, $y_۱ = ۴٫۵۳۹۳۲۴۹$

۲) $x_۱ = ۶٫۵۴۹۳۲۵۲$, $y_۱ = ۴٫۸۳۳۹۹۴۲$

۳) $x_۱ = ۴٫۵۳۹۳۲۴۹$, $y_۱ = ۶٫۲۹۳۵۴۵۵۱$

۴) $x_۱ = ۳٫۶۵۹۴۲۳۲۵$, $y_۱ = ۷٫۸۵۹۳۰۲۵۲$

۲۲ـ با استفاده از روش اویلر جواب معادله‌ی روبرو کدام است؟ $y' = f(x, y) = y$

$y(۰٫۷۵), y(۰) = ۱, h = ۰٫۲۵$ برای $m = ۳$؟

۱) ۲٫۴۲۴۲ ۲) ۳٫۵۳ ۳) ۲٫۴۴۱۴ ۴) ۲٫۶۴۳۵

۲۳ـ برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ به روی حذفی گاوس، پیچیدگی روش از لحاظ تعداد عملیات مقدماتی (جمع و ضرب) کدام است؟ (n = تعداد معادلات)

۱) $O(n^۲)$ ۲) $O(n^۳)$ ۳) $O(n^۴)$ ۴) $O(n^۵)$

۲۴ـ چنانچه دستگاه $\begin{cases} ۲x + y + z = ۴ \\ x + ۲y + z = ۴ \\ x + y + ۲z = ۴ \end{cases}$ را به روش تکراری گاوس ـ سایدل و با نقطهٔ اولیهٔ $x_۰ = y_۰ = z_۰ = ۰$ حل نماییم مقدار z بعد از تکرار اول ...

۱) ۰٫۷۵ ۲) ۰٫۵ ۳) ۰٫۲۵ ۴) ۰٫۴۵

۲۵ـ چنانچه دستگاه معادلات سؤال قبل را به روش ژاکوبی حل کنیم، مقدار x پس از ۲ تکرار؟

۱) $x = ۲$ ولی روش همگرای نیست. ۲) $x = ۰$ ولی روش همگرا نیست.

۳) $x = ۲$ و روش همگرا است. ۴) $x = ۰$ و روش همگرا است.

۲۶ـ روش تکرار ژاکوبی برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ که در آن $A = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & -۳ \\ -۹ & ۱۲ & ۱ \\ ۰ & ۸ & -۲۰ \end{bmatrix}$ می‌باشد به ازای هر نقطهٔ اولیه $P_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ ...

۱) همواره همگرا می‌باشد.

۲) هیچ وقت همگرا نمی‌باشد.

۳) همگرایی آن بستگی به نقطهٔ شروع اولیه $P_۰$ دارد.

۴) اطلاعات مسأله کافی نمی‌باشد.

۲۷ـ همگرایی دستگاه معادلات سؤال قبل با استفاده از روش تکراری گاوس ـ سایدل چگونه است؟

۱) همواره همگرا می‌باشد.

۲) هیچ‌وقت همگرا نمی‌باشد.

۳) همگرایی آن بستگی به نقطهٔ شروع اولیه $P_۰$ دارد.

۴) اطلاعات مسأله کافی نمی‌باشد.

۲۸ـ چنانچه دستگاه $\begin{cases} x_۱ + ۰/۹۹x_۲ = ۱/۹۹ + \alpha \\ ۰/۹۹x + ۰/۹۸x_۲ = ۱/۹۷ \end{cases}$ را به روش حذفی گاوس حل کنیم $(|\alpha| < ۱۰^{-۲})$ رفتار جواب معادله در ازای تغییرات α چگونه خواهد بود؟

۱) تغییرات جواب مسأله متناسب با میزان تغییرات α است.

۲) تغییرات جواب مسأله متناسب با توان دوم تغییرات α است.

۳) تغییرات کوچک در α منجر به تغییرات بزرگ در جواب مسأله می‌شود.

۴) تغییرات بزرگ در α منجر به تغییرات کوچک در جواب مسأله می‌شود.

۲۹ـ اگر از روش تکرار ساده (تعمیم‌یافته) برای حل دستگاه $\begin{cases} x = \dfrac{۸x - ۴x^۲ - y^۲ + ۱}{۸} \\ y = \dfrac{۲x - x^۲ + ۴x - y^۲ + ۳}{۴} \end{cases}$ با نقطهٔ اولیه $P_۰(۱, ۱/۲)$ استفاده شود پس از اولین تکرار چه مقداری برای x به دست می‌آید؟

۱) ۰/۴۴۵ ۲) ۰/۱۱۵ ۳) ۱/۱۱۵ ۴) ۱/۱۳

۳۰ـ برای حل دستگاه
$$\begin{cases} x = \dfrac{۲x - x^{۲} + y}{۲} \\ y = \dfrac{۲x - x^{۲} + ۸}{۹} + \dfrac{۴y - y^{۲}}{۴} \end{cases}$$
با روش تکرار غیرخطی سئیدل و با نقطهٔ اولیهٔ $P_۰(۱/۴, ۲)$ بعد از تکرار اول چه مقداری برای y به دست می‌آید؟

۱) ۱/۹۸۱۹ ۲) ۱/۹۸۰۴ ۳) ۱/۹۸۲۲ ۴) ۱/۹۸۱۴

۳۱ـ چندجمله‌ای‌های درونیاب برای داده

x	۱	۰	−۱
y	۰	۰	۰

۱) بی‌شمارند.

۲) می‌توانند چندجمله‌ایها دقیقاً درجه دوم باشند.

۳) می‌توانند چندجمله‌ایهای دقیقاً خطی باشند.

۴) با درجه کوچکتر یا مساوی دو، از نظر تعداد بی‌شمارند.

۳۲ـ خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدول زیر کدام است؟

x_i	−۲	−۱	۰	۱	۲
f_i	۰	۱	۲	۱	۳

۱) $y = ۰/۶x + ۱/۴$ ۲) $y = ۰/۴۴۵x + ۰/۳$

۳) $y = ۰/۳۷۷x + ۰/۲۵$ ۴) $y = ۰/۲۱x + ۰/۳۵$

۳۳ـ روش نیوتن برای محاسبه ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = (x-۲)^{۲} = ۰$ وقتی x به اندازه کافی نزدیک به عدد ۲ باشد، دارای نرخ (مرتبه) همگرایی جانبی برابر با ... است.

۱) یک ۲) دو

۳) بزرگتر از دو ۴) عددی بزرگتر از یک ولی کوچکتر از دو

۳۴ـ اگر مقادیر عددی تابع $y = f(x)$ در جدول زیر داده شده باشند و مقدار تقریبی مشتق دوم تابع را با استفاده از فرمول $f''(x_j) \simeq \dfrac{\delta^{۲} f_j}{h^{۲}}$ که در آن $\delta^{۲} f_j = f_{j-۱} - ۲f_j + f_{j+۱}$ (تفاضل مرکزی) محاسبه می‌کنیم برای $f''(۲/۱)$ داریم:

x	۲	۲/۱	۲/۲	۲/۳	۲/۴
$f(x)$	۱/۴۱۴۲۱۴	۱/۴۴۹۱۳۸	۱/۴۸۳۲۹۰	۱/۵۱۶۵۷۵	۱/۵۹۴۱۹۳

۱) $f''(۲/۱) \simeq ۰/۰۷۷۲$ ۲) $f''(۲/۱) \simeq ۰/۷۷۲$

۳) $f''(۲/۱) \simeq -۰/۷۷۲$ ۴) $f''(۲/۱) \simeq -۰/۰۷۷۲$

۳۵ـ برای معادلهٔ غیرخطی $e^x - e + 1 = 0$ ... قرار دارد.

۱) بیش از یک ریشه در فاصله $[0, 1]$
۲) تنها یک ریشه در فاصله $[-1, 0]$
۳) بیش از یک ریشه در فاصله $[-1, 0]$
۴) تنها یک ریشه در فاصله $[0, 1]$

۳۶ـ داده‌های x_i، $i = 0, 1, \ldots, n$ با $x_i \neq x_j$، $i \neq j$، موردنظر است. فرض کنید $L_i(x)$ توابع لاگرانژ وابسته به x_i ها باشند. در این صورت داریم: $\sum_{i=0}^{n} L_i(x)x_i^j = \ldots$

۱) $x^j, j = 1, \ldots, n+1$
۲) $x^{n+1}, j = 0, \ldots, n$
۳) $x^j, j = 0, 1, \ldots, n$
۴) $x^n, j = 0, 1, \ldots, n$

۳۷ـ برای رسیدن به خطای $\epsilon = 0/001$ در ریشه‌یابی معادله $(x \in [1, 2])$ $\quad f(x) = x^6 - x - 1 = 0$ تقریباً به ... مرحله تنصیف (بخش کردن) در روش تنصیف $(bisection)$ نیاز داریم.

۱) ۱۳
۲) ۱۰
۳) ۷
۴) ۱۰۰۰

۳۸ـ خطای فرمول تقریبی $f'(x_i + h/2) \simeq \dfrac{\Delta f_i}{h}$ متناسب است با ...

۱) h
۲) h^2
۳) h^3
۴) h^p، $1 < p < 2$

۳۹ـ فرض کنید ... $f'(x_0) = \dfrac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \dfrac{h^2}{6}f'''(x_0) - \dfrac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) + \ldots$

ملاحظه می‌کنیم که برای تقریب $f'(x_0) \simeq N(h) = \dfrac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$ مرتبهٔ خطای روش $O(h^2)$ است. با کدامیک از روش‌های تقریبی زیر می‌توان $f'(x_0)$ را با $O(h^4)$ تقریب زد؟

۱) $N(\frac{h}{2}) + \dfrac{N(\frac{h}{2}) - N(h)}{3}$
۲) $N(h) + \dfrac{N(h) - N(\frac{h}{2})}{3}$
۳) $N(\frac{h}{2}) + \dfrac{N(h) - N(\frac{h}{2})}{3}$
۴) $N(h) + \dfrac{N(\frac{h}{2}) - N(h)}{3}$

۴۰ـ روش نقطه میانی برای تخمین انتگرال معین در مقایسه با روش ذوزنقه‌ای دارای خطای برشی از مرتبه‌ای ... است و به تعداد ... محاسبه تابع نیاز دارد.

۱) بیشتر، کمتری
۲) یکسان، کمتری
۳) کمتر، کمتری
۴) بیشتر، بیشتری

۴۱ـ مقدار تقریبی $\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 6x - 7)dx$ از روش سیمپسون با $h = 0/25$ برابر است با ...

۱) $-4/1$
۲) -2
۳) -4
۴) $-2/2$

۴۲ـ فرض کنید می‌خواهیم $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ را با

$$M = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \qquad (*)$$

که در آن c_1، c_2، c_3 و x_1، x_2، x_3 تعیین می‌شوند، تقریب بزنیم. با تعیین مناسب این مقادیر، بیشترین درجهٔ چند جمله‌ایهایی که مقدار I وابسته به آنها دقیقاً از $(*)$ به دست می‌آیند، برابر است با ...

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۳ـ معادلهٔ دیفرانسیل $\begin{cases} y'(x) = x^2 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ را درنظر بگیرید. به ازای $h = ۰/۱$، مقدار تقریبی $y(۱/۲)$ از روش اویلر برابر است با ...

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۴۶۵ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۲۶۵

۴۴ـ محور (یا پاشنه) گزینی در روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی به منظور ...

۱) تنها ارتقای پایداری روش است.
۲) هم سرعت بخشیدن به زمان اجرای روش و هم ارتقای پایداری روش است.
۳) هم صرفه‌جویی در حافظه مورد نیاز و هم ارتقای پایداری روش است.
۴) هم صرفه‌جویی در حافظه مورد نیاز و هم سرعت بخشیدن به زمان اجرای روش است.

۴۵ـ می‌دانیم که $\lambda_1 = ۲$ یک مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ است و دترمینان A برابر است با ۳۶، دو مقدار ویژه دیگر A کدام است؟

۱) $\lambda_2 = ۱, \lambda_3 = ۱۸$ ۲) $\lambda_2 = ۳, \lambda_3 = ۶$ ۳) $\lambda_2 = ۲, \lambda_3 = ۹$ ۴) $\lambda_2 = ۲, \lambda_3 = ۷$

۴۶ـ تخمین $y(۰/۱)$ برای مسألهٔ $\begin{cases} y'(x) = xy^2 \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$ با استفاده از سری تیلور موردنظر است. تخمینهای حاصل از سری تیلور مرتبه دوم و سوم با قدم $h = ۰/۱$ را به ترتیب y_2 و y_3 بگیرید. در این صورت ...

۱) $y_2 < y_3$ ۲) $y_2 > y_3$ ۳) $y_2 = y_3$ ۴) $(y_2)(y_3) = ۰$

۴۷ـ فرمول اویلر برای حل مسأله با مقدار اولیه $y(۰) = ۰/۱$ و $y' = x + y$ با $h = ۰/۲$ عبارتست از $y_{n+1} = y_n + ۰/۲(x_n + y_n)$. فرمول اویلر تغییر یافته (Modified Euler) برای این مسأله عبارتست از:

۱) $y_{n+1} = y_n + 0/2(x_n + y_n) - 0/02$
۲) $y_{n+1} = y_n + 0/2(x_n + y_n) + 0/22$
۳) $y_{n+1} = y_n + 0/22(x_n + y_n) + 0/2$
۴) $y_{n+1} = y_n + 0/22(x_n + y_n) + 0/02$

۴۸ـ مرتبه همگرایی روش تکرار نیوتن برای پیدا کردن ریشه برای مسأله $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ برابر است با . . .

۱) درجه دوم ۲) زبرخطی (بهتر از خطی) ۳) خطی ۴) درجه سوم

۴۹ـ برای محاسبه مقدار $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ به . . . نیاز است.

۱) $2n$ ضرب و n جمع ۲) $n-1$ ضرب و n جمع

۳) $n + \frac{n(n+1)}{2}$ ضرب و n جمع ۴) n ضرب و n جمع

۵۰ـ برای معادلهٔ $f(x) = x^2 - 2x - 5 = 0$، روش تنصیف (نصف کردن فاصله) با شروع از فاصلهٔ . . .

۱) $[1, 2]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود. ۲) $[2, 3]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود.

۳) $[0, 1]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود. ۴) $[3, 2]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود.

۵۱ـ p، نرخ (مرتبهٔ) همگرایی روش نیوتن، برای محاسبه ریشهٔ برابر با صفر، در معادلهٔ $f(x) = x^5 - 2x^3 = 0$ از آنجا که مشتقات اول و دوم f در صفر مساوی صفر هستند، با شروع از یک نقطهٔ $x_0 \neq 0$، نزدیک به صفر، برابر است با . . .

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) p، $1 < p < 2$ ۴) p، $p > 2$

۵۲ـ روش نیوتن برای حل مسأله $\min_x(x^2)$ به ازای هر نقطه شروع x_0 . . .

۱) با تعداد متناهی تکرار به جواب می‌رسد. ۲) با یک تکرار به جواب می‌رسد.

) با سرعت همگرایی حداکثر خطی به جواب می‌رسد. ۴) ممکن است به جواب نرسد.

۵۳ـ انتگرالگیری به وسیله روشهای ذوزنقه‌ای و نقطه میانی در یک فاصله به اندازهٔ h، . . .

۱) به ترتیب خطاهای از مرتبه h^2 و h دارند.
۲) به ترتیب خطاهای از مرتبه h^2 دارند ولی ضریب خطای روش ذوزنقه‌ای کوچکتر است.
۳) به ترتیب خطاهای از مرتبه h^2 دارند ولی ضریب خطای نقطه میانی کوچکتر است.
۴) به ترتیب خطاهای از مرتبه h و h^2 دارند.

۵۴ـ مقادیر A و B برای تخمین انتگرال به صورت $\int_a^b f(x)dx \simeq Af(a) + Bf(b)$ چه باشند تا فرمول طرف راست برای چندجمله‌ایهای ثابت (درجهٔ ۰) و خطی (درجهٔ ۱)، جواب دقیق به دست دهد؟

۱) $A = B = \frac{a+b}{2}$

۲) $B = b + a, A = b - a$

۳) $B = \frac{b-a}{2}, A = \frac{b+a}{2}$

۴) $A = B = \frac{b-a}{2}$

۵۵ـ روش هیون برای حل معادلهٔ دیفرانسیل با شرط اولیهٔ $y(x_\circ) = y_\circ$ $\quad y'(x) = f(x, y(x)),$ به شرح زیر است (y_i تخمین برای $y(x_i)$ است):

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h_i \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h_i f(x_i, y_i))]. \end{cases}$$

معادلهٔ دیفرانسیل با شرط اولیهٔ $y'(x) = x^2 + y^2 - xy, y(1) = 0$ را درنظر بگیرید. با نقطه شروع $x_\circ = 1$ و $h_1 = 0/1$، یک قدم از روش هیون را به کار گیرید. y_1 تخمین $y(1/1)$ برابر است با . . .

۱) ۱/۱۰۵۵ ۲) ۱/۱۱۵۵ ۳) ۱/۱۱۶۵ ۴) ۱/۱۰۶۵

۵۶ـ یک روش رانگ ـ کاتا برای حل معادلهٔ دیفرانسیل $y(x_\circ) = y_\circ$ ، $\quad y'(x) = f(x, y)$ به شرح زیر است (y_i تخمین برای $y(x_i)$ است):

$$x_{i+1} = x_i + h, \qquad k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + k_1), \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

معادلهٔ دیفرانسیل $y'(x) = x^2 + y^2, y(1) = 1$ را درنظر بگیرید. به ازای $h = 0/1$ $(x_1 = x_\circ + 0/1 = 1/1)$، مقدار تخمین $y(1/1)$ برابر است با:

۱) ۱/۲۳۲۵ ۲) ۱/۲۳۲ ۳) ۱/۲۳۳ ۴) ۱/۲۳۲۵۵

۵۷ـ خطای برشی عبارت $\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$ به عنوان تخمینی برای $f''(x)$، مشتق دوم f در نقطه x، متناسب است با . . .

۱) h^3 ۲) h ۳) h^p، $1 < p < 2$ ۴) h^2

۵۸ـ در برازش چند جمله‌ای درجه دوم $P(x)$ به مفهوم کمترین مربعات خطا به داده‌ها:

x	۱	۰	۱-
y	۱	۰	۱

تعداد چند جمله‌ایهای حاصل . . .

۱) برابر یک است.
۲) می‌تواند صفر باشد.
۳) می‌تواند نامتناهی باشد.
۴) می‌تواند بیشتر از یک باشد ولی نامتناهی نیست.

۵۹ـ اگر در درونیابی توسط چند جمله‌ایهای مرتبه n محل گره‌ها را در ریشه‌های چندجمله‌ای درجه $n+1$ چیبیشف انتخاب کنیم، آنگاه در محاسبهٔ تابع درونیاب ...

۱) یا به علت منحصر به فرد بودن تابع درونیاب، در میزان خطای محاسباتی ایجاد شده تغییری پدید نمی‌آید.
۲) خطای محاسباتی کاهش می‌یابد.
۳) تعداد عملیات لازم کمتر می‌شود ولی خطای محاسباتی تغییری نمی‌کند.
۴) تعداد عملیات لازم بیشتر می‌شود، و در نتیجه خطای محاسباتی افزایش می‌یابد.

۶۰ـ چند جمله‌ای درونیاب برای درونیاب $(interpoloation)$ داده‌های $(x_i, f(x_i))$، $i = 1, \dots, n$ که در آن نقاط x_i مجزا هستند و $f(x) = x^{n-1}$، ...

۱) تنها x^{n-1} است.
۲) x^{n-1} است ولی چند جمله‌ایهای دیگری هم که تعدادشان متناهی است، وجود دارند.
۳) x^{n-1} است ولی چندجمله‌ایهای بی‌شمار دیگری هم وجود دارند.
۴) x^{n-1} نمی‌تواند باشد.

قسمت چهارم (حل مسائل قسمت سوم)

حل ۱.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
$$f(x, y) = y' = x + y$$
$$x_\circ = \circ ; y_\circ = ۱$$
$$y(\circ/۱) = y(\circ) + \circ/۱ f(\circ, ۱) = ۱ + \circ/۱(\circ + ۱) = ۱/۱$$
$$y(\circ/۲) = ۱/۱ + \circ/۱ f(\circ/۱, ۱/۱) = ۱/۱ + \circ/۱(۱/۲) = ۱/۱ + \circ/۱۲ = ۱/۲۲$$

حل ۲.

$$x_n = x_\circ + nh$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲)$$
$$k_۱ = hf(x_n, y_n)$$
$$k_۲ = hf(x_n + h, y_n + k_۱)$$
$$k_۱ = \circ/۱ f(\circ, ۱) = \circ/۱(\circ + ۱) = \circ/۱$$
$$k_۲ = \circ/۱ f(\circ + \circ/۱, ۱ + \circ/۱) = \circ/۱(\circ/۱ + ۱/۱) = \circ/۱۲$$
$$y(\circ/۱) = y(\circ) + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) = ۱ + \frac{۱}{۲}(\circ/۱ + \circ/۱۲) = ۱/۱۱$$

حل ۳.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
$$y(\circ/۲۵) = y(\circ) + \circ/۲۵(۱) = ۱/۲۵$$
$$y(\circ/۵) = y(\circ/۲۵) + hy(\circ/۲۵) = (h + ۱)y(\circ/۲۵) = (۱/۲۵)(۱/۲۵) = ۱/۵۶۲۵$$

حل ۴. روش رونگه ـ کوتای مرتبه چهارم عبارت است از:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴)$$

که در آن

$$k_۱ = hf(x_n, y_n), k_۲ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۱}{۲})$$
$$k_۳ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۲}{۲}),\ k_۴ = hf(x_n + h, y_n + k_۳)$$

لذا

$$y(\circ/۱) = y(\circ) + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴)$$
$$k_۱ = hf(\circ, ۱) = \circ/۱(\circ + ۱) = \circ/۱$$
$$k_۲ = \circ/۱ f(\circ/\circ۵, ۱/\circ۵) = \circ/۱۱$$
$$k_۳ = \circ/۱ f(\circ/\circ۵, ۱/\circ۵۵) = \circ/۱۱\circ۵$$
$$k_۴ = \circ/۱ f(\circ/۱, ۱/۱۱\circ۵) = \circ/۱۲۱\circ۵$$
$$\Rightarrow y(\circ/۱) = ۱ + \frac{۱}{۶}(\circ/۱ + \circ/۲۲ + \circ/۲۲۱ + \circ/۱۲۱\circ۵) = ۱/۱۱\circ۳۴$$

حل ۵.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), h = ۰/۲$$

$$y(۰/۲) = y(۰) + ۰/۲f(۰, ۲) = ۲ + ۰/۲(-۰ \times ۴) = ۲$$

$$y(۰/۴) = y(۰/۲) + ۰/۲f(۰/۲, ۲) = ۲ + ۰/۲(-۰/۲ \times ۴) = ۱/۸۴$$

حل ۶.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲)$$

$$k_۱ = hf(x_n, y_n) = hy_n$$

$$k_۲ = hf(x_n + h, y_n + k_۱)$$

$$f(x_n, y_n) = y_n \Rightarrow k_۱ = hy_n, \ k_۲ = h(y_n + k_۱)$$

$$k_۲ = h(y_n + hy_n) = hy_n + h^۲ y_n$$

$$k_۱ + k_۲ = ۲hy_n + h^۲ y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + y_n(h + \frac{h^۲}{۲}) = y_n(\frac{h^۲}{۲} + h + ۱)$$

لذا با قرار دادن $m = n$ گزینه ۱ صحیح است.

حل ۷.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴)$$

$$k_۱ = hf(x_n, y_n) = hy_n$$

$$k_۲ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۱}{۲}) = h(y_n + \frac{k_۱}{۲}) = h(y_n + \frac{hy_n}{۲}) = y_n(h + \frac{h^۲}{۲})$$

$$k_۳ = hf(x_n + \frac{h}{۲}, y_n + \frac{k_۲}{۲}) = h(y_n + \frac{k_۲}{۲}) = h(y_n + \frac{y_n}{۲}(h + \frac{h^۲}{۲})) = y_n(h + \frac{h^۲}{۲} + \frac{h^۳}{۴})$$

$$k_۴ = hf(x_n + h, y_n + k_۳) = h(y_n + k_۳) = h(y_n + y_n(h + \frac{h^۲}{۲} + \frac{h^۳}{۴}))$$

$$= y_n(h + h^۲ + \frac{h^۳}{۲} + \frac{h^۴}{۴})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{y_n}{۶}(h + ۲h + h^۲ + ۲h + h^۲ + \frac{h^۳}{۲} + h + h^۲ + \frac{h^۳}{۲} + \frac{h^۴}{۴})$$

$$y_{n+1} = y_n(۱ + h + \frac{h^۲}{۲} + \frac{h^۳}{۳} + \frac{h^۴}{۲۴})$$

بنابراین با قرار دادن $m = n$ گزینه ۱ صحیح است.

حل ۸.

$$y_{n+1} = y_n + kf(x_n, y_n) + \frac{h^۲}{۲} f'(x_n, y_n)$$

$$f(۰, ۱) = ۰ + ۲ = ۲$$

$$f'(x, y) = ۱ + ۲y' = ۱ + ۲f(x, y) \Rightarrow f'(۰, ۱) = ۱ + ۲f(۰, ۱) = ۱ + ۲(۲) = ۵$$

$$y(۰/۱) = y(۰) + ۰/۱(۲) + \frac{۰/۱}{۲}(۵) = ۱/۴۵$$

حل ۹. $x = -50 \pm \sqrt{2500 - 1} = -50 \pm \sqrt{2499} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -50 + \sqrt{2499} \\ x_2 = -50 - \sqrt{2499} \end{cases}$

برای حاصل‌ضرب دو ریشه داریم: $x_1 \cdot x_2 = 1$

می‌دانیم تفریق دو عدد تقریبی نزدیک هم با از دست دادن ارقام با معنی و در نتیجه با کم شدن خطا مواجه می‌شود. از این‌که $\sqrt{2499}$ و ۵۰ تقریباً مساوی هستند لذا بایستی از تفریق آن‌ها اجتناب نماییم. این حالت در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ رخ می‌دهد درحالی که برای گزینه ۱ چنین عملی اتفاق نمی‌افتد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

حل ۱۰. $y = b \cdot a \cdot \frac{1}{a},\ x = \frac{1}{y^2} = a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}$

$$e_f \leqslant \sum_1^n e_a \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(a_1, a_2, \cdots, a_n)}$$

$$f(a,b,c) = x = a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a}{b^2c^2},\quad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{-2a^2}{b^3c^2},\quad \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{-2a^2}{c^3b^2}$$

$$e_f \leqslant \frac{|2a|}{b^2c^2}\left(e_a + e_b\left|\frac{a}{b}\right| + e_c\left|\frac{a}{c}\right|\right)$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{|x|} = \frac{e_x}{a^2}b^2c^2 \leqslant \frac{2}{|a|}\left(e_a + e_b\left|\frac{a}{b}\right| + e_c\left|\frac{a}{c}\right|\right) \Rightarrow \delta_x \leqslant 2\left(\frac{e_a}{|a|} + \frac{e_b}{|b|} + \frac{e_c}{|c|}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_x \leqslant 2(\delta_a + \delta_b + \delta_c)$$

حل ۱۱.

$$D = d + e_1 \quad , \quad \frac{D}{2} = \frac{d}{2} + e_2$$

$$D^2 = (d + e_1)^2 = d^2 + e_1^2 + 2d \cdot e_1$$

$$\frac{D^2}{4} = \frac{d^2}{4} + e_2^2 + 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot e_2 = \frac{1}{4}(d^2 + 4e_2^2 + 4d \cdot e_2)$$

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{\pi}{4}(d^2 + e_1^2 + 2d \cdot e_1)$$

$$S_2 = \pi\frac{D^2}{4} = \frac{\pi}{4}(d^2 + 4e_2^2 + 4d \cdot e_2)$$

اگر فرض کنیم که $e_1 = e_2 = e$ آن‌گاه داریم:

$$S_1 = \frac{\pi}{4}(d^2 + e^2 + 2d \cdot e)$$
$$S_2 = \frac{\pi}{4}(d^2 + 4e^2 + 4d \cdot e)$$

روش دوم خطای بیشتری دارد. پس بهتر است که اول قطر را اندازه بگیریم. لذا گزینه (۱) درست است.

حل ۱۲. چون α ریشه تکراری معادله $f(x) = 0$ است پس مرتبه همگرایی آن خطی است لذا گزینه (۳) صحیح است.

حل ۱۳. چون معادله را می‌توان به صورت $\frac{۱}{x} = \cos x$ بازنویسی نمود بنابراین با رسم نمودار دو تابع $\frac{۱}{x}$ و $\cos x$ ملاحظه می‌شود که این نمودارها در بی‌نهایت نقطه برخوردارند، که هر محل برخورد نشان‌دهنده یک ریشه معادله‌ی $x\cos x - ۱ = ۰$ است. لذا گزینه (۴) صحیح است.

حل ۱۴.
$$\frac{b-a}{۲^n} < \varepsilon \ , \ \varepsilon = ۱۰^{-۳}$$
$$\frac{۱-۰}{۲^n} < ۱۰^{-۳} \Rightarrow ۲^n > ۱۰^۳ \Rightarrow n \geqslant ۱۰$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

حل ۱۵.
$$f(x,y) = y' = x + y \qquad y(۰) = ۰$$
$$y(۰/۱) = y(۰) + hf(۰,۰) + \frac{h^۲}{۲} f'(۰,۰)$$
$$f'(x,y) = ۱ + y' \Rightarrow f'(۰,۰) = ۱ + y'(۰) = ۱$$
$$\Rightarrow y(۰/۱) \simeq ۰ + ۰/۱(۰) + \frac{۰/۰۱}{۲}(۱) = ۰/۰۰۵$$
$$f'(x,y) = ۱ + y' = ۱ + x + y$$
$$f'(۰/۱, ۰/۰۰۵) = ۱ + ۰/۱ + ۰/۰۰۵ = ۱/۱۰۵$$
$$y(۰/۲) \simeq y(۰/۱) + ۰/۱ f(۰/۱, ۰/۰۰۵) + \frac{۰/۰۱}{۲} f'(۰/۱, ۰/۰۰۵)$$
$$= ۰/۰۰۵ + ۰/۰۱۰۵ + ۰/۰۰۵۵۲۵$$
$$\Rightarrow y(۰/۲) = ۰/۰۲۱۰۲۵۰$$

پس با ۳ رقم اعشار گزینه (۲) جواب صحیح است.

حل ۱۶. قرار می‌دهیم $y' = p \Rightarrow y'' = p'$ و بنابه فرض داریم: $y'(۰) = ۱ \Rightarrow p(۰) = ۱$
$$y'' = (y')' = y \Rightarrow p' = y = f(x,y)$$
$$p(x_۱) = p(x_۰) + hy(x_۰) \Rightarrow p(۰/۵) = p(۰) + ۰/۵y(۰) = ۱ + ۰ = ۱ \Rightarrow p(۰/۵) = ۱$$
$$y(x_۱) = y(x_۰) + hy'(x_۰) = ۰ + ۰/۵(۱) = ۰/۵ \Rightarrow y(۰/۵) = ۰/۵$$
$$y(۱) = y(x_۲) = y(۰/۵) + ۰/۵y'(۰/۵) = ۰/۵ + ۰/۵p(۰/۵) = ۰/۵ + ۰/۵ = ۱$$
$$y'(۱) = p(۱) = p(۰/۵) + hy(۰/۵) = ۱ + ۰/۵(۰/۵) = ۱/۲۵$$
$$y(۱) = ۱ \quad ; \quad y'(۱) = ۱/۲۵$$

حل ۱۷.
$$f(t,y) = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+y}$$
$$y(۰/۵) = y(۰) + ۰/۵f(۰,۱) = ۱ + ۰/۵(\frac{۱}{۰+۱}) = ۱/۵$$
$$y(۱) = y(۰/۵) + ۰/۵f(۰/۵, ۱/۵) = ۱/۵ + ۰/۵(\frac{۱/۵}{۲}) = ۱/۸۷۵$$

حل ۱۸.

$$f(x,y) = y' = ۲y$$

$$x_۰ = ۰, x_۱ = ۰/۰۵, x_۲ = ۰/۱, x_۳ = ۰/۱۵, y_۰ = ۱$$

$$y(۰/۰۵) = y(۰) + ۰/۰۵f(۰,۱) = ۱ + ۰/۰۵(۲ \times ۱) = ۱ + ۰/۱ = ۱/۱$$

$$y(۰/۱) = y(۰/۰۵) + ۰/۰۵f(۰/۰۵, ۱/۱) = ۱/۱ + ۰/۰۵(۲/۲) = ۱/۲۱$$

$$y(۰/۱۵) = y(۱/۱) + ۰/۰۵f(۰/۱, ۱/۲۱) = ۱/۲۱ + ۰/۰۵(۲/۴۲) = ۱/۳۳$$

حل ۱۹.

$$y_۱ = y(۲/۱) = y(۲) + ۰/۱f(۲,۱) = ۱ + ۰/۱(۲/۱) = ۱/۲۱$$

$$y_۲ = y(۲/۲) = y(۲/۱) + ۰/۱f(۲/۱, ۱/۲) = ۱/۲ + ۰/۱[(۲/۱)\cdot(۱/۲)] = ۱/۴۵۲$$

$$y_۳ = y(۲/۳) = y(۲/۲) + ۰/۱f(۲/۲, ۱/۴۵۲) = ۱/۴۵۲ + ۰/۱[(۱/۴۵۲)\cdot(۲/۲)] = ۱/۷۷۱۴۴$$

حل ۲۰.

$$y_{n+۱} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^۲}{۲}f'(x_n, y_n) + \frac{h^۳}{۶}f''(x_n, y_n)$$

$$y' = e^x = f(x,y) \Rightarrow f'(x,y) = f''(x,y) = e^x$$

$$y_{n+۱} = y_n + he^x(۱ + \frac{h}{۲} + \frac{h^۲}{۶})$$

$$y(۰/۱) \simeq y(۰) + (۰/۱ + \frac{(۰/۱)^۲}{۲} + \frac{(۰/۱)^۳}{۶}) = ۱ + ۰/۱ + ۰/۰۰۵ + ۰/۰۰۰۱۶۶۷ = ۱/۱۰۵۱۶۶۷$$

$$y(۰/۲) \simeq ۱/۱۰۵۱۶۶۷ + ۱/۱۰۵۱۷۰۹(۰/۱)(۱ + \frac{۰/۱}{۲} + \frac{۰/۰۱}{۶}) = ۱/۲۲۱۳۹۳۸$$

لذا با ۵ رقم اعشار گزینه (۳) صحیح است.

حل ۲۱.

$$x_۰ = ۶, y_۰ = ۴$$

$$k_۱ = hf_۱(x_۰, y_۰) = ۰/۰۲(۶ + ۸) = ۰/۲۸$$

$$l_۱ = hf_۲(x_۰, y_۰) = ۰/۰۲(۱۸ + ۸) = ۰/۵۲$$

$$k_۲ = hf_۱(x_۰ + \frac{k_۱}{۲}, y_۰ + \frac{l_۱}{۲}) = (۰/۰۲)f_۱(۶/۱۴, ۴/۲۶) = ۰/۰۲(۱۴/۶۶) = ۰/۲۹۳۲$$

$$l_۲ = hf_۲(۶/۱۴, ۴/۲۶) = ۰/۰۲(۱۸/۴۲ + ۸/۵۲) = ۰/۵۳۸۸$$

$$k_۳ = hf_۱(x_۰ + \frac{k_۲}{۲}, y_۰ + \frac{l_۲}{۲}) = (۰/۰۲)f_۱(۶/۱۴۶۶, ۴/۲۶۹۴) = ۰/۰۲(۱۴/۶۸۵۴) = ۰/۲۹۳۷۰۸$$

$$l_۳ = hf_۲(۶/۱۴۶۶, ۴/۲۶۹۴) = ۰/۰۲(۲۶/۹۷۸۶) = ۰/۵۳۹۵۷۲$$

$$k_۴ = hf_۱(x_۰ + k_۳, y_۰ + l_۳) = (۰/۰۲)f_۱(۶/۲۹۳۷۰۸, ۴/۵۳۹۵۷۲) = ۰/۳۰۷۴۵۷۰۴$$

$$l_۴ = hf_۲(۶/۲۹۳۷۰۸, ۴/۵۳۹۵۷۲) = (۰/۰۲)(۲۷/۹۶۰۲۶۸) = ۰/۵۵۹۲۰۵۳۶$$

$$y_۱ = y_۰ + \frac{۱}{۶}(l_۱ + ۲l_۲ + ۲l_۳ + l_۴) = ۴ + \frac{۱}{۶}(۳/۲۳۵۹۴۹۳۶) = ۴/۵۳۹۳۲۴۸۹۳$$

$$x_۱ = x_۰ + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = ۶ + \frac{۱}{۶}(۱/۷۶۱۲۷۳۰۴) = ۶/۲۹۳۵۴۵۵۰۶$$

پس گزینه (۱) درست است.

حل ۲۲.
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hy_n = y_n(h+1)$$
$$y(0/25) = (1/25)y(0) = (1/25) \times 1 = 1/25$$
$$y(0/5) = (1/25)(1/25) = 1/5625$$
$$y(0/75) = (1/25)(1/5625) = 1/9531$$
$$y(1) = (1/25)(1/9531) = 2/4414$$

حل ۲۳. گزینه (۲) درست است. زیرا اثبات می‌شود تعداد عملیات حسابی به صورت $o(\frac{n^3}{3})$ می‌باشد.

حل ۲۴. داریم:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(4 - y_0 - z_0) = \frac{1}{2}(4 - 0 - 0) = 2 \\ y_1 = \frac{1}{2}(4 - x_1 - z_0) = \frac{1}{2}(4 - 2 - 0) = 1 \\ z_1 = \frac{1}{2}(4 - x_1 - y_1) = \frac{1}{2}(4 - 2 - 1) = 0/5 \end{cases}$$

پس گزینه (۲) درست است.

حل ۲۵.
$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{1}{2}(4 - 0 - 0) = 2$$
$$x_2 = y_2 = z_2 = \frac{1}{2}(4 - 2 - 2) = 0$$

در تکرار دوم داریم $x_2 = 0$ ولی همانطورکه ملاحظه می‌شود برای هر n طبیعی x_n, y_n, z_n یا صفر هستند یا ۲ و با ادامه تکرار همین دو مقدار را اختیار خواهند کرد. پس گزینه (۲) درست است.

حل ۲۶. هرگاه ماتریس A ماتریسی اکیداً قطر غالب سطری (یا ستونی) باشد روشهای تکراری ژاکوبی و گاوس - سایدل با شروع از هر نقطه اولیه همگرا هستند.

تعریف. ماتریس A قطر غالب سطری نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \leqslant |a_{ii}| \qquad i = 1, \cdots, n$$

و اگر حداقل یکی از نامساوی‌ها به صورت نامساوی اکیدا باشد، ماتریس A را اکیداً قطر غالب سطری می‌نامیم.
یک ماتریس قطر غالب ستونی بایستی در شرط زیر صدق کند.
$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \leqslant |a_{jj}|$$

دقت کنید که A هم اکیداً قطر غالب سطری است و هم اکیداً قطر غالب ستونی است.

حل ۲۷. با توجه به توضیحات ارائه شده در سؤال ۲۶ گزینه (۱) صحیح است.

حل ۲۸. معادله اول را در ۰,۹۹− ضرب کرده با معادله دوم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} -۰,۹۹X_۱ - (۰,۹۹)^۲X_۲ = -(۰,۹۹)(۱,۹۹+\alpha) \\ ۰,۹۹X_۱ + ۰,۹۸X_۲ = ۱,۹۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_۱ = -۱۹۳۰۶\alpha - ۳۸۴۱۶,۹۵۰۱ \\ X_۲ = ۱۹۵۰۳\alpha + ۳۸۸۱۰,۹۷ \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود ضرایب α در $X_۱, X_۲$ از نظر قدرمطلق بسیار بزرگ هستند. پس تغییرات کوچک در α موجب تغییرات بزرگ در جواب مسأله می‌شود. در اصطلاح چنین مسأله‌ای را بد وضع گویند. لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۲۹. در روش تعمیم‌یافته تکرار ساده برای x داریم:

$$x_{k+۱} = \frac{۱}{۸}(۸x_k - ۴x_k^۲ - y_k^۲ + ۱)$$

برای $k=۰$ داریم $x_۰ = ۱$ و $y_۰ = ۱,۲$ بنابراین

$$x_۱ = \frac{۱}{۸}(۸ - ۴ - (۱,۲)^۲ + ۱) = ۰,۴۴۵$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

حل ۳۰. روش تکراری سایدل برای دستگاه داده شده به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_{k+۱} = \frac{۱}{۲}(۲x_k - x_k^۲ + y_k) \\ y_{k+۱} = \frac{۱}{۹}(۲x_{k+۱} - x_{k+۱}^۲ + ۸) + \frac{۱}{۴}(۴y_k - y_k^۲) \end{cases}$$

برای $k=۰$ داریم $x_۰ = ۱,۴$ و $y_۰ = ۲$ بنابراین:

$$\begin{aligned} x_۱ &= \frac{۱}{۲}(۲(۱,۴) - (۱,۴)^۲ + ۲) = \frac{۱}{۲}(۲,۸ - ۱,۹۶ + ۲) = ۱,۴۲ \\ y_۱ &= \frac{۱}{۹}(۲(۱,۴۲) - (۱,۴۲)^۲ + ۸) + \frac{۱}{۴}(۴(۲) - ۴) \\ &= \frac{۱}{۹}(۲,۸۴ - ۲,۰۱۶۴ + ۸) + \frac{۱}{۴}(۴) = ۰,۹۸۰۴ + ۱ = ۱,۹۸۰۴ \end{aligned}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

حل ۳۱. باتوجه به اینکه ۰، ۱ و ۱− ریشه‌های p هستند، می‌توان نوشت:

$$p(x) = (x-۱)(x)(x+۱)A(x) \Rightarrow p(۱) = p(۰) = p(-۱) = ۰$$

که در آن $A(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه دلخواه است. چون $A(x)$ تغییر می‌کند پس $p(x)$ منحصر به فرد نیست و درواقع بی‌شمار $p(x)$ می‌توان داشت. پس گزینه (۱) درست است.

حل ۳۲. فرض کنیم خط کمترین مربعات به صورت $y = ax + b$ باشد. داریم:

	x_i	y_i	$x_i^۲$	$x_i y_i$
	-۲	۰	۴	۰
	-۱	۱	۱	-۱
	۰	۲	۰	۰
	۱	۱	۱	۱
	۲	۳	۴	۶
مجموع	۰	۷	۱۰	۶

$$\begin{cases} \sum y_i - a\sum x_i - b\cdot n = ۰ \\ \sum x_i y_i - a\sum x_i^۲ - b\sum x_i = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = ۱/۴ \\ a = ۰/۶ \end{cases} \Rightarrow y = ۰/۶x + ۱/۴$$

حل ۳۳. چون عدد ۲ ریشه تکراری معادله $f(x) = ۰$ است پس سرعت همگرایی یک است.

حل ۳۴. $h = ۰/۱$

$$h^۲ f''(۲/۱) = h^۲[f(۲) - ۲f(۲/۱) + f(۲/۲)] = -۰/۰۰۰۷۷۲$$

$$f''(۲/۱) = \frac{-۰/۰۰۰۷۷۲}{h^۲} = -۰/۰۷۷۲$$

پس گزینه (۴) درست است.

حل ۳۵. یک ریشه در $[۰, ۱]$ دارد. $e^۰ - e + ۱ = -e < ۰$ و $e^۱ - e + ۱ = ۱ > ۰ \Rightarrow$

چون تابع $f(x) = e^x - e + ۱$ اکیداً صعودی است پس فقط یک ریشه در این فاصله وجود دارد.

حل ۳۶. برای سادگی فرض کنیم $n = ۳$ و $j = ۲$ در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=۰}^{۳} l_i(x)\cdot x_i^j &= l_۰(x)(۰)^۲ + l_۱(x)(۱) + l_۲(x)(۴) + l_۳(x)(۹) \\ &= \frac{x}{۲}(x-۲)(x-۳) - \frac{۴x}{۲}(x-۱)(x-۳) + \frac{۳x}{۲}(x-۱)(x-۲) \\ &= \frac{x}{۲}[x^۲ - ۵x + ۶ - ۴x^۲ + ۱۶x - ۱۲ + ۳x^۲ - ۹x + ۶] \\ &= \frac{x}{۲}[۲x] = x^۲ = x^j \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$if \quad j = ۰ \quad \Rightarrow \sum_{i=۰}^{۳} l_i(x)\cdot ۱ = ۱ = (x)^۰$$

لذا به کمک استقرار می‌توان نشان داد که برای $j = ۰, ۱, \cdots, n$ داریم $\sum_{j=۰}^{n} l_i(x)x_i^j = x^j$

پس گزینه (۳) درست است.

حل ۳۷.

$$\frac{b-a}{۲^n} = \frac{۲-۱}{۲^n} < ۱۰^{-۳} \Rightarrow ۲^n > ۱۰^۳ \Rightarrow n \geqslant ۱۰$$

پس گزینه (۲) درست است.

حل ۳۸.

$$f'(x+\frac{h}{۲}) \simeq f_i' + \frac{h}{۲}f_i'' + \frac{(\frac{h}{۲})^۲}{۲}f_i''' + \frac{(\frac{h}{۲})^۳}{۶}f_i^{(۴)} + \cdots$$

$$= f_i' + \frac{h}{۲}f_i'' + \frac{h^۲}{۶}f_i''' + \cdots \quad (۱)$$

$$\frac{\Delta f_i}{h} = \frac{۱}{h}(f_{i+۱} - f_i) = \frac{۱}{n}(hf_i' + \frac{h^۲}{۲}f_i'' + \frac{h^۳}{۶}f_i''' + \cdots)$$

$$= f_i' + \frac{h}{۲}f_i'' + \frac{h^۲}{۶}f_i''' \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow f'(x_i + \frac{h}{۲}) - \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{-h^۲}{۲۴}f_i''' + \cdots \approx o(h^۲)$$

پس گزینه (۲) درست است.

حل ۳۹. فرض کنیم: $A = \frac{۱}{۲h}[f(x_۰ + h) - f(x_۰ - h)]$ داریم:

$$N(\frac{h}{۲}) \simeq A - \frac{h^۲}{۲۴}f'''(x_۰) - \frac{h^۴}{۱۹۲۰}f^{(۵)}(x_۰) + \cdots$$

$$N(h) \simeq A - \frac{h^۲}{۶}f'''(x_۰) - \frac{h^۴}{۱۲۰}f^{(۵)}(x_۰) + \cdots$$

$$\Rightarrow N(\frac{h}{۲}) - N(h) \simeq \frac{۳h^۲}{۲۴}f'''(x_۰) + \frac{۱۵h^۴}{۱۹۲۰}f^{(۵)}(x_۰) + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{N(\frac{h}{۲}) - N(h)}{۳} + N(\frac{h}{۲}) \simeq A + \frac{h^۴}{۴۸۰}f^{(۵)}(x_۰) + \cdots (*)$$

لذا با فرمول $(*)$ خطا از مرتبه $o(h^۴)$ می‌شود. پس گزینه (۱) درست است.

حل ۴۰. داریم:

روش نقطه میانی: $EM(h) = (\frac{b-a}{۲۴})h^۲f''(\eta)$

روش ذوزنقه‌ای: $ET(h) = (\frac{b-a}{۱۲})h^۲f''(\eta)$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود خطای روش نقطه میانی نصف خطای روش ذوزنقه‌ای است و چون در روش ذوزنقه‌ای یک نقطه بیشتر از روش نقطه میانی به کار می‌رود، پس محاسبات روش ذوزنقه‌ای بیشتر است. ولی مرتبه خطای هر دو روش یکسان است. پس گزینه (۲) درست است.

حل ۴۱.

$$\int_{\cdot}^{۱}(۴x^۳-۳x^۲+۶x-۷)dx=\frac{h}{۳}f(\cdot)+۴f(\cdot/۲۵)+۲f(\cdot/۵)+۴f(\cdot/۷۵)+f(۱)$$
$$=\frac{۱}{۱۲}(-۷-۲۲/۵-۸/۵-۱۰+\cdot)=-۴$$

که در آن $f(x)=۴x^۳-۳x^۲+۶x-۷$

حل ۴۲. در انتگرال‌گیری گاوسی n ـ نقطه‌ای در صورتی که $n=۱,۲,\cdots$ برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه $۲n-۱$ دقیق است پس $۵=۱-۳\times۲=۲n-۱$ دقیق است.

(در صورتی که $n=\cdot,۱,۲,\cdots$ باشد یعنی نقاط $c_۱,c_۲,\cdots$ و $x_۱,x_۲,\cdots$ باشند آن گاه انتگرال‌گیری گاوسی $n+۱$ ـ نقطه‌ای برای حداکثر از درجه $۲n+۱$ دقیق است.)

حل ۴۳.

$$y_{n+۱}=y_n+hf(x_n,y_n)$$
$$y(۱/۱)=y(۱)+\cdot/۱f(۱,۱)=۱+\cdot/۱\times۲=۱/۲$$
$$y(۱/۲)=y(۱/۱)+\cdot/۱f(۱/۱,۱/۲)=۱/۲+\cdot/۱\times۲/۳=۱/۴۶۵$$

حل ۴۴. باتوجه به مطالب صفحه ۱۵۹ کتاب. گزینه (۱) صحیح است.

حل ۴۵. می‌دانیم:

(۱ $\lambda_۱+\lambda_۲+\lambda_۳=\mathrm{trace}(A)=۳+۵+۳=۱۱$

(۲ $\lambda_۱\lambda_۲\lambda_۳=\det(A)=۳۶$

لذا از این‌که $\lambda_۱=۲$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\lambda_۲+\lambda_۳=۹\\ \lambda_۲\lambda_۳=۱۸\end{cases}$$

که باتوجه به گزینه‌های داده شده، گزینه (۲) صحیح است.

حل ۴۶. روش تیلور مرتبه سوم عبارت است از

$$y_{n+۱}=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^۲}{۲}f'(x_n,y_n)+\frac{h^۳}{۶}f''(x_n,y_n)$$

اگر جمله آخر را در رابطه فوق درنظر نگیریم روش تیلور مرتبه دوم را خواهیم داشت. داریم:

$$y(\cdot/۱)=y(\cdot)+\cdot/۱(\cdot)+\frac{\cdot/\cdot۱}{۲}(\cdot+۱)+\frac{\cdot/\cdot\cdot۱}{۶}(\cdot+\cdot)$$

$$f''(x_n,y_n)=۴xy^۲+۶x^۲y^۲y'+۲yy'\Rightarrow f''(\cdot,۱)=\cdot+\cdot+\cdot=\cdot\Rightarrow y_۲=y_۳$$

حل ۴۷. فرمول اویلر تغییر یافته عبارت است از:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{۲}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i-1)})]$$

داریم $f(x,y) = x + y$ بنابراین:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{۲}[x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1}^{(i-1)}]$$

برای $h = ۰/۲$ و با حذف زیرنماهای i و $i-۱$ داریم:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{۰/۲}{۲}[x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1}]$$

اما داریم $x_{n+1} = x_n + h$ و $y_{n+1} = y_n + ۰/۲(x_n + y_n)$، بنابراین:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + ۰/۱[x_n + y_n + x_n + ۰/۲ + y_n + ۰/۲(x_n + y_n)] \\ &= y_n + ۰/۱[۲/۲x_n + ۲/۲y_n] + ۰/۰۲ \\ &= y_n + ۰/۲۲(x_n + y_n) + ۰/۰۲ \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

حل ۴۸. از این‌که $x = ۱$ ریشه تکراری معادله $f(x) = ۰$ است پس مرتبه همگرایی به صورت $P = ۱$ یا خطی است.

حل ۴۹. در روش هورنر به n ضرب و n جمع نیاز داریم پس گزینه (۴) صحیح است. هرگاه برای سادگی قرار دهیم $n = ۳$ روش هورنر برای محاسبه چندجمله‌ای $p(x) = a_۳x^۳ + a_۲x^۲ + a_۱x + a_۰$ در $x = a$ به صورت زیر به کار می‌رود:

$$p(a) = ((a_۳ \times a + a_۲) \times a + a_۱) \times a + a_۰$$

اگر عملیات را از داخلی‌ترین پرانتز انجام دهیم به ۳ ضرب و ۳ جمع نیاز داریم و در حالت کلی برای چندجمله‌ای درجه n به n جمع و n ضرب نیاز خواهیم داشت.

۵۰. در بازه $[۳, ۴]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود زیرا:

$$f(۰) = -۵ < ۰$$

$$f(۱) = -۶ < ۰$$

$$f(۲) = -۵ < ۰$$

$$f(۳) = -۲ < ۰$$

$$f(۴) = ۳ > ۰$$

چون $f(۳) \cdot f(۴) < ۰$ در بازه $[۳,۴]$ یک جواب دارد.

حل ۵۱. چون صفر ریشه تکراری معادله $f(x) = ۰$ است، پس مرتبه همگرایی روش نیوتن در این‌جا یک است.

حل ۵۲. می‌توان نشان داد که روش بهینه‌سازی نیوتن برای توابع مجذوری با یک تکرار به جواب می‌رسد، لذا گزینه (۲) صحیح است.

حل ۵۳. گزینه (۳) درست است. برای توضیح به مسأله ۴۰ مراجعه نمایید.

حل ۵۴. فرض کنیم $f(x) = ۱$ داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = b - a = A + B \quad (*)$$

باتوجه به رابطه $(*)$ فقط گزینه (۴) در آن صدق می‌کند. لذا نیازی به بکارگیری رابطه برای $f(x) = x$ نداریم.

حل ۵۵.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{۲}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+۱}, y_i + h_i f(x_i, y_i))]$$

$$y(۱/۱) = y(۱) + \frac{۰/۱}{۲}[f(۱,۰) + f(۱/۱, ۰ + ۰/۱ f(۱,۰))]$$

$$= ۰ + ۰/۰۵[۱ + f(۱/۱, ۰/۱)] = ۰/۰۵[۱ + ۱/۱۱] = ۰/۱۰۵۵$$

پس گزینه (۱) درست است.

حل ۵۶.

$$y(۱/۱) = y(۱) + \frac{۱}{۲}[k_۱ + k_۲]$$

$$k_۱ = ۰/۱ f(۱,۱) = ۰/۱(۲) = ۰/۲$$

$$k_۲ = ۰/۱ f(۱/۱, ۱/۲) = ۰/۱(۱/۲۱ + ۱/۴۴) = ۰/۲۶۵$$

$$y(۱/۱) = ۱ + ۰/۲۳۲۵ = ۱/۲۳۲۵$$

پس گزینه (۱) درست است.

حل ۵۷.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^۲}{۲}f''(x) + \frac{h^۳}{۶}f'''(x) + \frac{h^۴}{۲۴}f^{(۴)}(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^۲}{۲}f''(x) - \frac{h^۳}{۶}f'''(x) + \frac{h^۴}{۲۴}f^{(۴)}(x) + \cdots$$

$$f(x+h) - ۲f(x) + f(x-h) = h^۲ f''(x) + \frac{h^۴}{۱۲}f^{(۴)}(x) + \cdots$$

$$\frac{f(x+h) - ۲f(x) + f(x-h)}{h^۲} - f''(x) = \frac{h^۲}{۱۲}f^{(۴)}(x) + \cdots$$

پس خطا با $o(h^۲)$ متناسب است. لذا گزینه (۴) درست است.

حل ۵۸. فقط چندجمله‌ای $p(x) = x^۲$ از درجه ۲ می‌باشد که می‌توان نقاط جدول را برازش کند. پس گزینه (۱) درست است.

حل ۵۹. قضیه: خطای چندجمله‌ای درونیاب وقتی مینیمم است که نقاط درونیابی ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف باشند. پس گزینه (۲) درست است.

حل ۶۰. داریم:

$$p(x) - f(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot \Pi_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

و چون f از درجه $n - 1$ است پس:

$$p(x) - f(x) = 0 \;\Rightarrow\; p(x) = x^{n-1}$$

لذا گزینه (۱) درست است. در واقع چون f یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n - 1$ است بنابراین یک و تنها یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n - 1$ وجود دارد که با f در n نقطه x_i منطبق است که همان $p(x) = x^{n-1}$ است.

آثار منتشر شده انتشارات: گسترش علوم پایه

کد	نام کتاب	مؤلف/مترجم	نوبت چاپ	قیمت
	ریاضی و آمار			
	۱- حسابان (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۰۰۰۰ریال
	۲- حسابان (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۹۰۰۰ریال
۱۴۳	۳- ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ یازدهم	۴۵۰۰۰ریال
۱۱۵	۴- راهنمای حل ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ پنجم	۴۶۰۰۰ریال
۱۴۲	۵- ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سیزدهم	۴۵۰۰۰ریال
۲	۶- راهنمای حل ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ هفتم	۲۸۰۰۰ریال
۹	۷- تحقیق در عملیات (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۴۰۰۰ریال
۱۳۵	۸- آمار و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ نهم	۴۴۰۰۰ریال
۱۸۴	۹- راهنمای حل آمار و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ پنجم	۲۵۰۰۰ریال
۱۱۲	۱۰- آمار و کاربرد آن در مدیریت (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ هفتم	۴۴۰۰۰ریال
۱۱۷	۱۱- راهنمای حل آمار و کاربرد آن در مدیریت (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۲۵۰۰۰ریال
۱۳	۱۲- ریاضیات گسسته	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۵۰۰۰ریال
۱۰۲	۱۳- ریاضیات پیش دانشگاهی (مدیریت، حسابداری، اقتصاد و بازرگانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ یازدهم	۳۶۰۰۰ریال
۱۳۰	۱۴- راهنمای حل ریاضیات پیش دانشگاهی (مدیریت، حسابداری، اقتصاد و بازرگانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۲۵۰۰۰ریال
۱۴	۱۵- ریاضیات پیش دانشگاهی (فنی مهندسی ـ علوم پایه)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ نهم	۳۳۰۰۰ریال
۱۰۰	۱۶- راهنمای حل ریاضیات پیش دانشگاهی (فنی مهندسی ـ علوم پایه)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۳۶۰۰۰ریال
۲۱	۱۷- آمار و احتمال (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار ـ جلوبان	چاپ سوم	۳۶۰۰۰ریال
۲۲	۱۸- آمار و احتمال (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار ـ جلوبان	چاپ اول	۳۲۰۰۰ریال
۲۳	۱۹- جبر خطی بنیادی	ترجمه دکتر رحمتی ـ اسلامزاده	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۲۴	۲۰- نخستین درس در معادلات انتگرال	ترجمه دکتر مهدی دهقان	چاپ اول	۱۳۰۰۰ریال
۳۶	۲۱- جبر (۱)	تألیف نیکوکار ـ غافری	چاپ اول	۳۰۰۰۰ریال
۶۳	۲۲- جبر (۲)	تألیف نیکوکار ـ غافری	چاپ اول	۳۰۰۰۰ریال
۳۷	۲۳- راهنمای حل مسائل جبر (۱)	تألیف نیکوکار ـ غافری	چاپ اول	۳۰۰۰۰ریال
۱۰۳	۲۴- محاسبات عددی (ویرایش جدید)	تألیف نیکوکار ـ درویشی	چاپ هشتم	۳۶۰۰۰ریال
۱۸۳	۲۵- راهنمای حل مسائل آمار ریاضی ۱ـ۷ (جلد اول)	تألیف نیکوکار ـ ملکی ـ غازانی	چاپ دوم	۳۵۰۰۰ریال
۲۲۳	۲۶- راهنمای حل مسائل آمار ریاضی ۸ـ۱۳ (جلد دوم)	تألیف نیکوکار ـ ملکی ـ غازانی	چاپ دوم	۳۷۰۰۰ریال
۱۲۶	۲۷- راهنمای حل مسائل آمار ریاضی ۱۴ـ۱۶ (جلد سوم)	تألیف نیکوکار ـ ملکی ـ غازانی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۲۲۹	۲۸- زبان تخصصی رشته ریاضی (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۲۳۰۰۰ریال
۴۵	۲۹- گزیده مسائل جبر خطی	تألیف دکتر نیکوکار ـ مؤمنی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ریال
۴۴	۳۰- حل تشریحی ۵۰۰ مسئله آنالیز (سرژ لانگ)	ترجمه نیکوکار ـ صاروی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ریال
۴۷	۳۱- وارون ماتریسهای غیر مربعی	ترجمه نیکوکار ـ درویشی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۴۶	۳۲- ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی	تألیف نیکوکار ـ فردوسیان	چاپ اول	۱۲۵۰۰ریال
۲۲۲	۳۳- حل مسائل جبر خطی کنت هافمن	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۲۲۰۰۰ریال
۷۱	۳۴- مبانی ریاضیات	تألیف دکتر نیکوکار ـ غافری	چاپ اول	۳۵۰۰۰ریال
۱۸۱	۳۵- ریاضی عمومی (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ پنجم	۴۴۰۰۰ریال
۷۷	۳۶- راهنمای حل ریاضی عمومی (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۵۰۰۰ریال
۱۹۶	۳۷- آمار و احتمالات (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۴۵۰۰۰ریال
۷۴	۳۸- راهنمای حل آمار و احتمالات (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۲۰۰۰ریال
۱۱۰	۳۹- راهنمای حل معادلات دیفرانسیل (کارشناسی ناپیوسته)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۴۰۰۰ریال
۸۵	۴۰- گزیده مسائل آنالیز ریاضی	تألیف نیکوکار ـ سپهر خالقی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ریال
۱۰۱	۴۱- ریاضی (۷)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۳۷۰۰۰ریال
۱۲۱	۴۲- راهنمای حل مسائل ریاضی (۷)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۶۶	۴۳- حساب دیفرانسیل و انتگرال (پیش دانشگاهی)	تألیف مرزبان ـ خلت	چاپ اول	۹۰۰۰ریال
۱۱۸	۴۴- گزیده تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)	تألیف مازیار زاهدی سرشت	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۱۵۲	۴۵- توپولوژی	تألیف نیکوکار ـ غافری	چاپ اول	۳۵۰۰۰ریال
۱۶۵	۴۶- ایده‌های المپیاد ریاضی (۱) ـ ویرایش دوم	تألیف نیکوکار ـ احمدلو	چاپ دوم	۱۸۵۰۰ریال
۱۸۵	۴۷- آشنایی با نظریه گراف (وست)	ترجمه دکتر بیژن شمس	چاپ اول	۲۵۰۰۰ریال
۱۸۹	۴۸- حل تشریحی سیلورمن ـ ریاضی عمومی (۲)	تألیف دکتر نیکوکار ـ نصیری	چاپ اول	۴۰۰۰۰ریال
۱۹۱	۴۹- اصول حسابداری (۱)	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۱۹۴	۵۰- نظریه اعداد	تألیف دکتر نیکوکار ـ غافری	چاپ اول	۳۵۰۰۰ریال
۲۰۱	۵۱- مدیریت بازاریابی جهانی	تألیف دکتر زری باف ـ حسینی کیا	چاپ اول	۲۷۰۰۰ریال
۲۱۸	۵۲- شناخت روش‌ها و فنون تجزیه و تحلیل سیستم‌های اطلاعاتی	ترجمه اکبری ـ مؤمنی خانی	چاپ اول	۱۲۰۰۰ریال
۲۲۶	۵۳- مهندسی سیستم‌ها (تحقیق در عمران)	تألیف دکتر ناصر حمیدی	چاپ اول	۱۹۰۰۰ریال
۲۲۵	۵۴- آشنایی با اصول حسابداری و مقدمات هزینه‌یابی	تألیف دکتر حمیدی ـ حمیدی‌زاده	چاپ اول	۳۵۰۰۰ریال
	کامپیوتر			
۲۰	۵۵- حل مسائل مهندسی کنترل MATLAB(۱و۲)	ترجمه دکتر نیکوکار ـ جباریه	چاپ اول	۲۸۰۰۰ریال
۲۱۴	۵۶- برنامه‌نویسی با MATLAB	تألیف دکتر درویشی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۲۲۸	۵۷- تحقیق در عملیات مدل‌سازی‌ها	تألیف دکتر درویشی ـ عباس‌پندی	چاپ اول	۲۶۰۰۰ریال
۱۹	۵۸- آموزش سریع Windows 2000 professional	ترجمه نیکوکار ـ جباریه	چاپ اول	۱۲۰۰۰ریال
۶۵	۵۹- برنامه‌نویسی زبان C (مقدماتی و پیشرفته)	تألیف دکتر صفائی ـ توسلی	چاپ اول	۳۵۰۰۰ریال
۱۱۳	۶۰- الگوریتم و تکنیک‌های برنامه‌نویسی به زبان پاسکال	تألیف دکتر صفائی ـ توسلی	چاپ اول	۴۰۰۰۰ریال
۸۳	۶۱- ++C و برنامه‌سازی شی‌ءگرا با آن	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ریال
۱۴۷	۶۲- مبانی کامپیوتر و برنامه‌نویسی به زبان QBASIC	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ دوم	۲۵۰۰۰ریال
۲۲۴	۶۳- آموزش عملی Excel	تألیف دکتر صفائی ـ توسلی	چاپ دوم	۱۸۵۰۰ریال
۱۲۲	۶۴- انگلیسی برای علوم کامپیوتر	تألیف ایرج صادقی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ریال
۱۲۳	۶۵- طراحی الگوریتم‌ها	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ریال
۳۲	۶۶- خودآموز و راهنمای ویژوال V	ترجمه دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۱۸۰۰۰ریال
۱۳۷	۶۷- معماری کامپیوتر (حل کامل مسائل معماری موریس مانو)	تألیف مهندس علی پروندیا	چاپ اول	۱۲۰۰۰ریال
۱۵۴	۶۸- هزار مسأله در معماری کامپیوتر	تألیف مهندس فرشاد صفایی	چاپ اول	۴۵۰۰۰ریال
۱۴۰	۶۹- آموزش علمی و عملی وب‌سایت و اینترنت	تألیف دکتر صفائی ـ توسلی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال
۱۲۹	۷۰- آموزش عملی Word	تألیف جواد توسلی ـ مهتاب توسلی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ریال

۱۴۶	۷۱- آموزش علمی و عملی Access	تألیف جواد توسلی	چاپ اول	۱۲۰۰۰ ریال
۲۵۰	۷۲- آموزش نرم‌افزار S-Plus	تألیف نیکوکار - ترابی و...	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۱۷۰	۷۳- زبانهای ماشین و اسمبلی و برنامه‌سازی سیستم	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۳۳۰۰۰ ریال
۱۷۱	۷۴- نرم‌افزار ۱	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۷۲	۷۵- نرم‌افزار ۲	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۲۸	۷۶- مهندسی نرم‌افزار (۱) پرسمن	ترجمه مهندس نوید هاشمی طبا	چاپ اول	۵۶۰۰۰ ریال
۱۲۹	۷۷- مهندسی نرم‌افزار (۲) پرسمن	ترجمه مهندس نوید هاشمی طبا	چاپ اول	۷۰۰۰۰ ریال
۲۰۷	۷۸- IT کلام نخست برای پروژه‌های IT	تألیف مجتبی محمدرضایی	چاپ اول	۲۳۰۰۰ ریال
۱۹۹	۷۹- کتاب آموزشی Windows XP	ترجمه دکتر نیکوکار - ترستانی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۲۲۷	۸۰- رایانه کار درجه ۲ (ICDL) (جلد اول)	تألیف مهندس مقسمی	چاپ اول	۲۲۰۰۰ ریال
۶۰۲۴	۸۱- مونتاژ کامپیوتر	تألیف سروس لرستانی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال

دوره فراگیر (پیام‌نور)

۲۰۵	۸۲- اصول کامپیوتر ۱	تألیف مهندس مقسمی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۲۱۹	۸۳- اصول حسابداری	تألیف ملک‌پور - علایی	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۲۲۵	۸۴- حقوق جزای عمومی ۱	تألیف رضا محمدی	چاپ اول	۳۳۰۰۰ ریال
۲۲۹	۸۵- راهنمای فارسی عمومی	تألیف بهاء... شکوری	چاپ اول	۳۷۰۰۰ ریال
۲۲۶	۸۶- معارف اسلامی	تألیف خدیجه اعتمادی	چاپ اول	۲۳۰۰۰ ریال
۶۰۲۶	۸۷- معارف اسلامی (فراگیر پیام‌نور)	تألیف رضا محمدی	چاپ اول	۲۹۰۰۰ ریال
۶۰۲۷	۸۸- زبان عمومی (فراگیر پیام‌نور)	تألیف حبیبوند	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۶۰۲۸	۸۹- فارسی عمومی (فراگیر پیام‌نور)	تألیف دکتر فدایی	چاپ اول	۲۷۰۰ ریال

کاردانی پیوسته

۱۵۴	۹۰- مجموعه سؤالات دروس عمومی	بهروش - حبیبوند - فلاحی - حبیبوند	چاپ اول	۱۲۰۰۰ ریال
۱۲۹	۹۱- درس و کنکور مبانی کامپیوتر و بیسیک (مواد کامپیوتری)	تألیف مهندس مقسمی	چاپ سوم	۲۵۰۰۰ ریال
۱۲۲	۹۲- مجموعه سؤالات دروس پایه	تألیف مهندس مقسمی	چاپ اول	۱۶۰۰۰ ریال
۱۰۸	۹۳- مجموعه سؤالات عمومی و پایه کنکور علمی کاربردی	تألیف مهندس مقسمی	چاپ اول	۷۰۰۰ ریال
۱۴۶	۹۴- سیستم عامل (پیوسته)	تألیف استاد گرجی - عظیمی	چاپ اول	۱۲۵۰۰ ریال
۶۰۱۸	۹۵- دفترچه آزمون و پاسخ تشریحی کامپیوتر (سراسری ۸۲)	تألیف استاد کریم و...	چاپ اول	۳۰۰۰ ریال
۲۰۸	۹۶- اصول حسابداری	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۴۵۰۰۰ ریال
۲۰۹	۹۷- حسابداری صنعتی (بهای تمام‌شده)	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۲۲۰۰۰ ریال
۲۱۰	۹۸- امور عمومی بازرگانی و سازمان و مدیریت	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۲۱۱	۹۹- مفاهیم و روشهای آماری	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۲۹۰۰۰ ریال
۲۱۳	۱۰۰- ریاضیات امور مالی	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال

کارشناسی ناپیوسته (کاردانی به کارشناسی)

۱۵۵	۱۰۱- زبان و ادبیات فارسی (جلد اول)	تألیف فلاحی کلیشمی	چاپ هشتم	۴۰۰۰۰ ریال
۲۲۰	۱۰۲- زبان و ادبیات فارسی (جلد دوم)	تألیف فلاحی کلیشمی	چاپ چهارم	۳۵۰۰۰ ریال
۱۲۷	۱۰۳- معارف اسلامی	تألیف علی اکبر فراهانی	چاپ هشتم	۴۸۰۰۰ ریال
۱۲۹	۱۰۴- زبان عمومی (جلد اول)	تألیف حبیبوند	چاپ ششم	۳۶۰۰۰ ریال
۲۲۱	۱۰۵- واژگان زبان عمومی (جلد دوم)	تألیف حبیبوند	چاپ دوم	۲۸۰۰۰ ریال
۲۲۴	۱۰۶- ریاضی عمومی (۱)	تألیف نیکوکار - مقسمی	چاپ ششم	۲۸۰۰۰ ریال
۱۵۶	۱۰۷- ریاضی عمومی (۲)	تألیف نیکوکار - مقسمی	چاپ چهارم	۴۴۰۰۰ ریال
۲۵۱	۱۰۸- فیزیک الکتریسیته و مغناطیس	تألیف امیرهوشنگ رمضانی	چاپ اول	۴۲۰۰۰ ریال
۲۱۵	۱۰۹- آمار و احتمالات	تألیف نیکوکار - مقسمی	چاپ سوم	۳۱۰۰۰ ریال
۱۸۰	۱۱۰- مجموعه سؤالات دروس عمومی کلیه رشته‌ها	تألیف فلاحی - حبیبوند - فراهانی	چاپ سوم	۴۵۰۰۰ ریال
۲۱۶	۱۱۱- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته علوم آزمایشگاهی (جلد اول)	تألیف گروه مؤلفان	چاپ اول	۴۵۰۰۰ ریال
۲۱۷	۱۱۲- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته علوم آزمایشگاهی (جلد دوم)	تألیف گروه مؤلفان	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۲۲۲	۱۱۳- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته عمران	تألیف شاهمراد کرامی	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۲۲۳	۱۱۴- استاتیک (عمران)	تألیف فرشاد امجدی	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۲۲۸	۱۱۵- استاتیک مکانیک	تألیف فرشاد امجدی	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۲۲۹	۱۱۶- مکانیک خاک	تألیف محسن تبیزی‌زاده	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۲۴	۱۱۷- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته کامپیوتر (جلد اول) ۷۹-۱۳۸۰	تألیف مهندس مقسمی	چاپ چهارم	۵۰۰۰۰ ریال
۱۵۸	۱۱۸- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته کامپیوتر (جلد دوم) ۸۰-۱۳۸۳	تألیف مهندس مقسمی	چاپ پنجم	۵۰۰۰۰ ریال
۲۲۲	۱۱۹- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته کامپیوتر (جلد سوم) ۱۳۸۴ به بعد	تألیف مهندس مقسمی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۲۳۷	۱۲۰- درس و کنکور Windows	تألیف مهندس مقسمی	چاپ سوم	۳۷۰۰۰ ریال
۲۳۱	۱۲۱- درس و کنکور زبان تخصصی کامپیوتر	تألیف مهندس مقسمی	چاپ سوم	۳۵۰۰۰ ریال
۲۴۷	۱۲۲- مدار منطقی (ناپیوسته)	تألیف مهندس مقسمی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۱۷۳	۱۲۳- مجموعه سؤالات آزمونهای رشته الکترونیک (جلد اول)	تألیف حسن شادکامانور	چاپ سوم	۲۱۰۰۰ ریال
۲۲۵	۱۲۴- الکترونیک ۱ و ۲	تألیف حسن شادکامانور	چاپ اول	۵۰۰۰۰ ریال
۲۴۱	۱۲۵- ماشین‌های الکتریکی (جلد اول)	تألیف حسن شادکامانور	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۲۴۲	۱۲۶- ماشین‌های الکتریکی (جلد دوم)	تألیف حسن شادکامانور	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۱۸۲	۱۲۷- ساختمان داده‌ها	تألیف مهندس مقسمی	چاپ هشتم	۷۰۰۰۰ ریال
۲۳۶	۱۲۸- پایگاه داده‌ها	تألیف مهندس مقسمی	چاپ ششم	۳۷۰۰۰ ریال
۲۱۴	۱۲۹- مفاهیم سیستم عامل	تألیف مهندس مقسمی	چاپ هفتم	۳۳۰۰۰ ریال
۱۹۰	۱۳۰- زبان C	تألیف مهندس مقسمی	چاپ ششم	۴۴۰۰۰ ریال
۱۷۷	۱۳۱- UNIX	تألیف مهندس مقسمی	چاپ سوم	۲۲۰۰۰ ریال
۱۹۳	۱۳۲- درس و کنکور پاسکال	تألیف مهندس مقسمی	چاپ هشتم	۴۶۰۰۰ ریال
۱۸۴	۱۳۳- ذخیره و بازیابی اطلاعات	تألیف مهندس مقسمی	چاپ پنجم	۴۷۰۰۰ ریال
۱۹۲	۱۳۴- درس و کنکور حسابرسی	تألیف ملک‌پور - علایی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۲۴۳	۱۳۵- اقتصاد (خرد)	تألیف شامنظری - علایی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۵۰	۱۳۶- حسابداری	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ چهارم	۴۲۰۰۰ ریال
۱۹۷	۱۳۷- حسابداری صنعتی	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۹۸	۱۳۸- حسابداری دولتی	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۲۰۰	۱۳۹- حسابداری مالی و حسابداری شرکتها	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۲۰۲	۱۴۰- حسابرسی	تألیف محمدعلی جلالی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال

کارشناسی ارشد

۲۳۰	۱۴۱- ریاضیات و کاربرد در مدیریت و اقتصاد و حسابداری (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۸۰۰۰۰ ریال

۲۲۸	۱۴۲- آمار و کاربرد در مدیریت و اقتصاد و حسابداری (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۰۳	۱۴۳- آمادگی کنکور تحقیق در عملیات (رشته ریاضی)	تألیف نیکوکار ـ درویشی ـ ناصری	چاپ اول	۱۸۰۰۰ ریال
۵۵	۱۴۴- پژوهش عملیاتی (مدیریت، حسابداری، اقتصاد، بازرگانی)	تألیف نیکوکار ـ درویشی	چاپ اول	۳۲۰۰۰ ریال
۱۰۹	۱۴۵- آمادگی کنکور (رشته صنایع) پژوهش عملیاتی	تألیف نیکوکار ـ درویشی	چاپ اول	۱۸۰۰۰ ریال
۱۵	۱۴۶- تست جبر و جبر خطی	تألیف دکتر عرفانیان	چاپ دوم	۱۸۰۰۰ ریال
۲۰۳	۱۴۷- سؤالات کارشناسی ارشد رشته ریاضی (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ چهارم	۶۰۰۰۰ ریال
۳۴	۱۴۸- مجموعه سؤالهای ریاضی (ارشد فنی مهندسی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۷۰۰۰ ریال
۳۵	۱۴۹- مجموعه سؤالهای ریاضی (ارشد فنی مهندسی دانشگاه آزاد)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۳۰۰۰ ریال
۵۶	۱۵۰- آمار صنایع و مدیریت سیستم و بهره وری	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۱۶	۱۵۱- سؤالات کارشناسی ارشد و مسابقات دانشجویی آنالیز (۱، ۲ و ۳ همراه با حل تشریحی)	تألیف نیکوکار ـ عربلو ـ زارع زاده	چاپ سوم	۳۲۰۰۰ ریال
۷۲	۱۵۲- آمار و احتمال کشاورزی (گزینه‌های چهار جوابی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۴۲	۱۵۳- الکتریسیته و الکترومغناطیس	تألیف دکتر مسعود مرادشاهی	چاپ اول	۳۲۰۰۰ ریال
۱۷۸	۱۵۴- الکترونیک	تألیف دکتر مسعود مرادشاهی	چاپ اول	۱۹۰۰۰ ریال
۱۶۳	۱۵۵- مدارهای منطقی	تألیف پروین دخت مقسمی	چاپ سوم	۳۲۰۰۰ ریال
۱۵۹	۱۵۶- انتقال داده‌ها	تألیف فرشاد صفائی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۱۲۰	۱۵۷- پایگاه داده‌ها	تألیف نعمتی ـ صفائی	چاپ دوم	۱۸۰۰۰ ریال
۲۰۴	۱۵۸- معماری کامپیوتر	تألیف پروین دخت مقسمی	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۲۰۶	۱۵۹- برنامه نویسی کامپیوتر (مهندسی صنایع و ...)	تألیف مهندس مقسمی	چاپ اول	۵۰۰۰۰ ریال
۱۴۵	۱۶۰- سیستم عامل	تألیف مهندس مقسمی	چاپ پنجم	۲۷۰۰۰ ریال
۶۰۲۱	۱۶۱- مروری بر اقتصاد خرد	تألیف اخلاقی ـ اکبری مقدم	چاپ اول	۱۶۰۰۰ ریال

فنی مهندسی

۱۱۴	۱۶۲- طراحی به کمک Mechanical Desktop	تألیف کاکاوند ـ اسماعیل زاده	چاپ اول	۱۳۵۰۰۰ ریال
۱۳۱	۱۶۳- طراحی اجزای دوار	تألیف پاشنگ ـ قضائی	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۱۵۱۰	۱۶۴- مکانیک مواد مرکب	تألیف دکتر ریاحی ـ افشلی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۶۱	۱۶۵- مواد و فرایندهای جوشکاری	تألیف قضائی ـ پاشنگ	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۱۲۱	۱۶۶- آموزش آرمیچرپیچی به زبان ساده	تألیف مجتبی جعفرزاده	چاپ سوم	۳۲۰۰۰ ریال
۱۰۵	۱۶۷- آموزش تعمیر لوازم خانگی به زبان ساده (جلد اول)	تألیف مجتبی جعفرزاده	چاپ هفتم	۳۵۰۰۰ ریال
۱۰۴	۱۶۸- آموزش تعمیر لوازم خانگی به زبان ساده (جلد دوم)	تألیف مجتبی جعفرزاده	چاپ هفتم	۳۰۰۰۰ ریال
۱۶۸	۱۶۹- آموزش سیم پیچی به زبان ساده (جلد اول)	تألیف جعفرزاده ـ غلامی	چاپ دوم	۲۲۰۰۰ ریال
۱۶۹	۱۷۰- آموزش سیم پیچی به زبان ساده (جلد دوم)	تألیف جعفرزاده ـ غلامی	چاپ دوم	۲۹۰۰۰ ریال
۱۸۷	۱۷۱- آموزش تراشکاری به زبان ساده (جلد اول)	تألیف شیدلون ـ جعفرزاده	چاپ اول	۱۸۰۰۰ ریال
۱۸۸	۱۷۲- آموزش تراشکاری به زبان ساده (جلد دوم)	تألیف شیدلون ـ جعفرزاده	چاپ اول	۱۷۰۰۰ ریال
۱۶۷	۱۷۳- خودآموز رسم فنی	تألیف پاشنگ ـ قضائی	چاپ اول	۱۶۰۰۰ ریال
۲۵	۱۷۴- ترمودینامیک شیمیائی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۳۰۰۰ ریال
۲۶	۱۷۵- مسائل شیمی تجزیه محلول‌های آبی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۱۷۶	۱۷۶- مسائل ترمودینامیک شیمیائی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۳۰۰۰ ریال
۱۷۴	۱۷۷- سینتیک شیمیائی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۴۰۰۰ ریال
۱۷۵	۱۷۸- مسائل سینتیک شیمیائی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۶۰۰۰ ریال
۲۸	۱۷۹- زمین شناسی عمومی و مهندسی	تألیف دکتر اسماعیل خزائی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال

پزشکی

۳۲	۱۸۰- تست بیوشیمی	تألیف مرتضی نیکوکار	چاپ اول	۱۰۰۰۰ ریال
۱۶۴	۱۸۱- مبانی لیزر پزشکی	ترجمه دکتر عباس مجدآبادی	چاپ اول	۱۳۰۰۰ ریال
۳۹	۱۸۲- اصول بیوشیمی	تألیف مرتضی نیکوکار	چاپ اول	—
۶۱	۱۸۳- دانستنی‌های بیماریهای عفونی	تألیف دکتر بشارت	چاپ اول	۹۰۰۰ ریال
۶۹	۱۸۴- بیماریهای عفونی نوپدید قرن ۲۱	تألیف دکتر بشارت	چاپ اول	۹۰۰۰ ریال
۷۳	۱۸۵- گرانقدر اندیشان عفونی	تألیف دکتر بشارت	چاپ اول	۶۵۰۰ ریال
۷۹	۱۸۶- جنون گاوی بیماری عفونی نوظهور	تألیف دکتر بشارت	چاپ اول	۱۰۰۰۰ ریال
۱۱۴۰	۱۸۷- جمله‌ها و نکته‌ها	تألیف دکتر بشارت	چاپ اول	۱۳۵۰۰ ریال
۱۲۸	۱۸۸- آناتومی سر و گردن و اصول گوش و گلو و بینی	تألیف دکتر رضا ضیائی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۱۱۹	۱۸۹- چگونه می‌توانیم از حمله قلبی جلوگیری کنیم	ترجمه مریم پاشنگ	چاپ اول	۱۵۵۰۰ ریال

متفرقه

۲۴۰	۱۹۰- کانادا در ترازو	تألیف رضا پورزاهد	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۸۱	۱۹۱- آشنایی با شوراهای اسلامی	تألیف محمد زمانی	چاپ اول	۶۰۰۰ ریال
۶۴	۱۹۲- فرهنگ ضرب‌المثل‌های معاصر	تألیف بهمن گرجیان ـ شیوا متولیا	چاپ اول	۱۴۰۰۰ ریال
۱۱۱	۱۹۳- داستانهای واقعی برای زبان‌آموزان مقدماتی انگلیسی	تألیف مرجان حاج عظیمی	چاپ اول	۶۰۰۰ ریال
۱۲۳	۱۹۴- سیری در قانون تجارت	تألیف مقدسیان ـ زمانی	چاپ اول	۵۰۰۰ ریال
۱۲۴	۱۹۵- سایه عشق (گزیده اشعار عاشقانه)	گردآورنده مهندس مقسمی	چاپ اول	۹۵۰۰ ریال
۶۰۱۵	۱۹۶- مباحثی در مجموعه‌های نظریه فازی	گردآورنده دکتر برزویی	چاپ اول	۱۰۰۰۰ ریال
۶۰۲۷	۱۹۷- ریاضیات پیشرفته برای دانشجویان مهندسی و علوم (الشینگال)	ترجمه آذربنات رضوانی	چاپ اول	۴۹۰۰۰ ریال
۶۰۲۸	۱۹۸- اصول نظریه انتگرال	ترجمه دکتر رضوانی	چاپ اول	۱۲۰۰۰ ریال
۶۰۳۱	۱۹۹- ۱۰۲ مسأله ترکیبیات (المپیاد ریاضی آمریکا)	ترجمه عباس ثروتی	چاپ اول	۱۲۰۰۰ ریال
۶۰۳۲	۲۰۰- المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف ۱۹۹۵	ترجمه مرتضی محمدآبادی	چاپ اول	۵۵۰۰ ریال
۶۰۳۳	۲۰۱- المپیادهای ادبی ایران (۸۳-۸۲)	تألیف شیوا مؤمنی	چاپ اول	۳۰۰۰ ریال
۶۰۳۴	۲۰۲- الفبای نورهندسی	تألیف علیرضا صادقی‌راد	چاپ اول	۲۱۰۰۰ ریال
۶۰۳۵	۲۰۳- پاسخی بر المپیادهای کامپیوتر ایران (۱)	تألیف یاسر احمدی فولادی	چاپ اول	—
۶۰۳۶	۲۰۴- پاسخی بر المپیادهای کامپیوتر ایران (۲)	تألیف یاسر احمدی فولادی	چاپ اول	۲۲۰۰۰ ریال

آدرس: تهران ـ میدان انقلاب ـ ابتدای خ کارگر جنوبی ـ کوچه مهدی زاده ـ پلاک ۲ ـ طبقه همکف
کد پستی: ۱۳۱۳۹۶۵۳۴۱ ـ تلفن: ۱۵ ـ ۶۹۰۵۳۱۲ ـ فاکس: ۶۹۰۵۳۱۶ ـ همراه: ۰۹۱۲۰۱۳۰۱۹۰۵
ساعت کاری: شنبه الی چهارشنبه ۹ تا ۱۸/۳۰ ـ پنجشنبه ۹ تا ۱۳/۳۰
(استراحت ۱۴ تا ۱۵)
WWW.Gostareshedoloomepayeh.com
E-mail: info@Gostareshedoloomepayeh

۱۰۲

گسترش علوم پایه

شابک: ۸-۰۴۸-۴۹۰-۹۶۴-۹۷۸
ISBN: 978-964-490-048-8
تلفن انتشارات : ۱۵-۶۶۹۰۵۳۱۲
تلفکس: ۶۶۹۰۵۳۱۶ -۰۲۱
مرکز پخش تهران :
۱۴ ۵۵ ۵۹ ۶۶ - ۱۳ ۵۵ ۵۹ ۶۶